אנליזת פורייה

פרק 5 - דיסטריבוציות

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. נגזרת דיסטריביוטיבית 1
3. גבולות דיסטריביוטיביים 2
4. טור פורייה של דיסטריבוציה ..... (ללא ספר)
5. התמרת פורייה של דיסטריבוציה ..... (ללא ספר)

נגזרת דיסטריביוטיבית:

שאלות:

1) מצאו $f'(x)$ במובן הדיסטריביוטיבי כאשר $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ x^2+2x & 1\le x<2\\ 2x & x\ge 2\end{cases}$.

2) מצאו $f''(x)$ במובן הדיסטריביוטיבי כאשר $f(x)=e^{-|x|}$.

3) מצאו $f''(x)$ במובן הדיסטריביוטיבי כאשר $f(x)=|x|\sin(x)$.

4) תהי $h(x)\in C^{\infty}(-\infty,\infty)$ (פונקציה גזירה אינסוף פעמים) ותהי L דיסטריבוציה.
הוכיחו כי $(hL)'=h'L+hL'$ (כאשר הנגזרות הן במובן הדיסטריביוטיבי).

5) הוכיחו כי $(1+x-e^x)\delta'''(x)=\delta(x)-3\delta'(x)$.

6) יהיו $j,k\in\mathbb{N}$. הראו כי:
א. אם $j>k$ אז $x^j\cdot\delta^{(k)}(x)=0$.
ב. אם $j\le k$ אז $x^j\cdot\delta^{(k)}(x)=\frac{(-1)^j}{k!(j-k)!}\delta^{(k-j)}(x)$.

רמז: תוכלו להיעזר בנוסחת לייבניץ לגזירה $\left[f(x)\cdot g(x)\right]^{(k)}=\sum_{i=0}^{i=k}\binom{k}{i}f^{(i)}(x)g^{(k-i)}(x)$.

תשובות סופיות:

1) $f'(x)=2\delta(x-1)-4\delta(x-2)+h(x)$

2) $f^{(2)}=-2\delta(x)+e^{-|x|}$

3) $f^{(2)}=\begin{cases}-\left[2\cos(x)-x\sin(x)\right] & x<0\\ 2\cos(x)-x\sin(x) & x>0\end{cases}$

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גבולות דיסטריביוטיביים:

שאלות:

1) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטריביוטיבי $\lim_{h\to 0}\frac{\delta(x+h)-\delta(x-h)}{2h}$.

2) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטריביוטיבי $f_n(x)=\frac{n}{2}e^{-n|x|}$.

3) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטריביוטיבי $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$.

4) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}n & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}\\ 0 & else\end{cases}$.

א. בדקו האם הסדרה מתכנסת נקודתית על הישר הממשי.

ב. בדקו האם הסדרה מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי.

ג. בדקו האם הסדרה מתכנסת במובן הדיסטריביוטיבי.

5) תהי $f_n(x)=\begin{cases}1-x^n & |x|<1\\ \frac{1}{n} & |x|\geq 1\end{cases}$ סדרת דיסטריבוציות במרחב D'.

א. מצאו את הגבול הדיסטריביוטיבי $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$.

ב. מצאו את הגבול הדיסטריביוטיבי $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם $\varphi(x)$ פונקציית מבחן אזי $\lim_{|\omega|\to\infty}\omega^n\hat{\varphi}(\omega)=0$ לכל n טבעי.

ב. יהי N טבעי קבוע. הוכיחו כי הגבול של $f_k(x)=k^N\sin(kx)$ במובן הדיסטריביוטיבי הינו 0.

תשובות סופיות:

1) $\delta'(x)$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}e^{-n|x|}=\delta(x)$

3) $\left|\int_a^b \sin(\lambda x)\varphi(x)\,dx\right|\le\int_a^b|\varphi(x)|\,dx\equiv M$

4) א. יהי x שרירותי. אם $x\le 0$ אז $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

אם $x>0$ אז החל מ-n גדול מספיק מתקיים $\frac{2}{n}<x$.

ב. $\sup_{(-\infty,\infty)}|f_n(x)-f(x)|=n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$.

ג. $\langle f_n(x),\varphi(x)\rangle\xrightarrow{n\to\infty}\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle$.

5) א. $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$ ב. $\delta(x+1)-\delta(x-1)$

6) א. הוכחה. ב. הוכחה.