

# מכינה להנדסה ומדעים מדוייקים 01150

פרק 9 - דינמיקה - תנועה בהשפעת כוחות (חוקי ניוטון)

תוכן העניינים

1. הקדמה, חוק ראשון ושלישי ..... 1
2. תרגילים נוספים לחוק ראשון ושלישי ..... 10
3. חוק שני של ניוטון ..... 14
4. הכוח האלסטי- קפיץ ..... 29
5. תאוצות לא שוות ..... 34

## הקדמה, חוק ראשון ושלישי:

### שאלות:

#### דינמיקה והכוחות הבסיסיים:

##### (1) דוגמה 1

חשב את שקול הכוחות הפועל על גוף במקרה הבא:



##### (2) דוגמה 2

חשב את שקול הכוחות הפועל על גוף במקרה הבא:



##### (3) דוגמה 3

חשב את שקול הכוחות הפועל על גוף במקרה הבא:



##### (4) דוגמה 4

באיור הבא נתונים הכוחות  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  וידוע כי הגוף נע במהירות קבועה בקו ישר. מצא את גודלו וכיוונו של  $\vec{F}_3$ .



##### (5) דוגמה 5

גוף תלוי במנוחה מהתקרה באמצעות חוט יחיד. מהי המתחיות בחוט אם מסת הגוף היא 2 ק"ג?



**6 דוגמה 6**

גוף תלוי במנוחה מהתקרה באמצעות שני חוטים, לפי האיור הבא.  
 מהי המתחיות בכל חוט אם מסת הגוף היא 3 ק"ג?

**7 דוגמה 7**

גוף תלוי במנוחה מהתקרה באמצעות חוט ומחובר לקיר המאונך לתקרה באמצעות חוט נוסף (הסתכל באיור).  
 מהי המתחיות בכל חוט אם מסת הגוף היא 3 ק"ג?

**8 דוגמה 8**

מסה של 2 ק"ג נמצאת במנוחה על שולחן.  
 א. שרטט תרשים כוחות על המסה.  
 ב. מהו גודלו וכיוונו של הכוח הנורמלי הפועל מהשולחן על המסה?  
 ג. מהו גודלו וכיוונו של הכוח הנורמלי הפועל על השולחן מהמסה?

**9 דוגמה 9**

מסה של 5 ק"ג תלויה במנוחה מהתקרה באמצעות חוט יחיד.  
 א. מהי המתחיות בחוט?  
 ב. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעיל החוט על התקרה?  
 ג. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעילה התקרה על החוט?

**10 דוגמה 10**

דני ויוסי מושכים בחבל משני צידיו, כל אחד מהם מושך בכוח של 50 ניוטון.  
 מהי המתחיות בחבל?

**11 דוגמה 11**

במערכת הבאה ישנה מסה של 3 ק"ג הנמצאת במנוחה על שולחן.  
 על המסה מונחת מסה נוספת של 2 ק"ג.  
 א. שרטט תרשים כוחות לכל אחת מהמסות.  
 ב. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על המסה העליונה.  
 ג. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על המסה התחתונה מהשולחן.  
 ד. חשב את הכוח הנורמלי הפועל על השולחן.

**12 דוגמה 12**

שלוש מסות מונחות אחת על גבי השנייה ועל הקרקע במנוחה, כפי שנראה בציר.



א. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעילה המסה הכי תחתונה על המסה מעליה?

ב. מהו גודלו וכיוונו של הכוח שמפעילה הרצפה על המסה הכי תחתונה?

**חיכוך:****13 גוף על שולחן**

גוף בעל מסה של 3 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן. מקדם החיכוך הסטטי הוא  $\mu_s = 0.4$ .

א. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל על הגוף, כך שישאר במנוחה?

כוח אופקי בגודל 10 ניוטון פועל על הגוף ימינה.

ב. מצא את גודלו וכיוונו של החיכוך הסטטי.

**14 כוח מלמעלה**

גוף בעל מסה של 4 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן. כוח אנכי בגודל של 5 ניוטון לוחץ את הגוף כלפי השולחן. מקדם החיכוך הסטטי הוא:  $\mu_s = 0.4$ .

א. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל על הגוף, כך שישאר במנוחה?

כוח אופקי בגודל 15 ניוטון פועל על הגוף שמאלה.

ב. מצא את גודלו וכיוונו של החיכוך הסטטי.

**15 כוח תלוי בזמן**

גוף בעל מסה של 5 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן.

כוח אופקי התלוי בזמן  $F(t) = 2 \cdot t^2$  פועל על הגוף ימינה.

מקדם החיכוך הסטטי הוא:  $\mu_s = 0.3$ .

א. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל על הגוף, כך שישאר במנוחה?

ב. מתי יתחיל הגוף בתנועה?

ג. שרטט גרף של החיכוך הסטטי כתלות בזמן.



**16) כוח בזווית**

גוף בעל מסה של 3 ק"ג נמצא במנוחה על שולחן.  
 כוח קבוע פועל על הגוף בזווית של 30 מעלות עם הכיוון האופקי.  
 מקדם החיכוך הסטטי הוא:  $\mu_s = 0.3$ .

א. מהו הגודל המקסימלי של הכוח בשאלה אותו ניתן להפעיל  
 כך שהגוף ישאר במנוחה?

ב. מצא את גודלו וכיוונו של החיכוך הסטטי אם גודל הכוח הוא 5 ניוטון.

**17) דני מושך במקביל לקרקע**

דני מושך ארגז במקביל לקרקע.  
 ידוע כי מסת הארגז היא 20 ק"ג, ומקדם  
 החיכוך הקינטי בין הארגז לקרקע הוא:  $\mu_k = 0.2$ .

מצא מהו גודלו של הכוח שמפעיל דני, אם הארגז נע במהירות קבועה.

**18) ירון מושך בזווית**

ירון מושך ארגז באמצעות חבל הנמתח בזווית  
 של 30 מעלות ביחס לקרקע.  
 ידוע כי מסת הארגז היא 20 ק"ג, ומקדם החיכוך  
 הקינטי בין הארגז לקרקע הוא:  $\mu_k = 0.2$ .

מצא מהו גודלו של הכוח שמפעיל ירון, אם הארגז נע במהירות קבועה.

**19) כוח בכמה כיוונים**

מצא מה גודל הכוח הדרוש להזיז את הארגז במהירות קבועה בכל אחד  
 מהמקרים הבאים.

מסת הארגז היא 100 ק"ג ומקדם החיכוך של הארגז עם הרצפה הוא:  $\mu_k = 0.4$ .

א. כוח מושך אופקי

ב. כוח מושך בזווית של 20°



ג. כוח מושך בזווית של 30°

ד. כוח דוחף בזווית של 30° מתחת לאופק



**20) מסה על מסה קשורה לקיר**

מסה של 2 ק"ג מונחת מעל מסה של 5 ק"ג.  
המסה העליונה קשורה בחוט אופקי לקיר משמאל.  
מקדמי החיכוך בין המסות ובין המסה התחתונה  
למשטח הם:  $\mu_k = 0.2$ ,  $\mu_s = 0.3$ .

- מהו הכוח האופקי המקסימלי שניתן להפעיל על המסה התחתונה בכיוון ימין, כך שהיא תישאר במנוחה?
- מה המתוחות בחוט, אם הכוח הוא אותו כוח שחישבת בסעיף א'?
- מה הכוח אותו יש להפעיל על מנת למשוך את המסה התחתונה במהירות קבועה? הנח שהמסה כבר בתנועה.

**21) מסה על מסה קשורה לקיר בזווית**

מסה של 3 ק"ג מונחת מעל מסה של 6 ק"ג.  
המסה העליונה קשורה בחוט המתוח בזווית של 30 מעלות ומחובר לקיר משמאל.  
מקדם החיכוך הסטטי בין המסות ובין המסה התחתונה למשטח הוא:  $\mu_s = 0.3$ .

- מהו הכוח האופקי המקסימלי שניתן להפעיל על המסה התחתונה בכיוון ימין, כך שהיא תישאר במנוחה?
- מהי המתוחות בחוט, אם גודל הכוח הינו זהה לערך אותו חישבת בסעיף א'?

**22) שתי משקולות תלויות על שולחן**

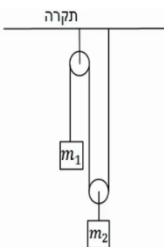
שתי משקולות זהות בעלות מסה של 4 ק"ג תלויות במנוחה משני צידיו של שולחן. המשקולות מחוברות באמצעות חוט העובר דרך גלגלות אידיאליות, ראה איור.



- מהי המתוחות בחוט?
- מהו הכוח (גודל וכיוון) שמפעיל המוט המחובר את הגלגלת לשולחן עבור כל גלגלת?
- האם היה שינוי בתשובתך לסעיפים הקודמים במידה והמסות היו נעות במהירות קבועה לאחד הכיוונים?

**23) יחס מסות**

שתי מסות תלויות באמצעות חוטים וגלגלות אידיאלים לפי האיור הבא. המערכת נמצאת במנוחה.



- מצא את היחס בין המסות:  $\left(\frac{m_1}{m_2} = ?\right)$ .
- מצא את המתוחות בכל חוט במערכת, אם ידוע ש:  $m_2 = 40\text{gr}$ .

## המישור המשופע:

## 24) מסה בשיפוע



מסה של 3 ק"ג נמצאת במנוחה על מישור משופע בעל זווית של 40 מעלות. בין המסה למדרון קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא:  $\mu_s = 0.2$ .

א. שרטט תרשים כוחות לבעיה.  
 ב. מצא את גודלם של הכוח הנורמלי והחיכוך.

## 25) מסה בשיפוע ומסה באוויר



מסה של 5 ק"ג מונחת על מישור משופע בעל זווית של 50 מעלות. המסה מחוברת באמצעות חוט אידיאלי ודרך גלגלת אידיאלית למסה נוספת M התלויה באוויר מצידו השני של המישור.

א. מצא את גודלה של המסה M, על מנת שהמערכת תשאר במנוחה כאשר אין חיכוך בבעיה.  
 כעת נתון שבין המסה למדרון קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא:  $\mu_s = 0.3$ .

ב. מצא מה הוא גודלה המקסימלי והמינימלי האפשרי של M, על מנת שהמערכת תשאר במנוחה.

## 26) זווית החלקה



מסה m מונחת על מישור משופע ונמצאת במנוחה. מגדילים את זווית השיפוע של המישור בקצב איטי.

א. מצא את הזווית בה תתחיל המסה להחליק אם מקדם החיכוך הסטטי בין המסה למישור הוא:  $\mu_s = 0.2$ .  
 תרגול בפרמטרים.

ב. פתור את סעיף א' שוב כאשר מקדם החיכוך נתון כפרמטר  $\mu_s$  ללא ערך מספרי.  
 ג. חשוב על דרך כללית למדידת מקדם החיכוך הסטטי של גוף עם משטח כלשהו.

## 27) שתי מסות שני שיפועים



במערכת הבאה ישנו מדרון עם שיפוע שונה משני צידיו, זוויות השיפוע הן  $\theta_1, \theta_2$ . שתי מסות שונות  $m_1, m_2$  מונחות בשני צידי המדרון. המסות מחוברות באמצעות חוט אידיאלי, ודרך גלגלת אידיאלית המקובעת למדרון. אין חיכוך בין המדרון למסות.

נתון:  $\theta_1, \theta_2, m_1$  וכי המערכת נמצאת במנוחה.  
 מצא את  $m_2$ .

**28 שתי מסות שני שיפועים וחיכוך**

במערכת הבאה ישנו מדרון עם שיפוע שונה משני צידיו,

זוויות השיפוע הן:  $\theta_1, \theta_2$ .

שתי מסות שונות  $m_1, m_2$  מונחות בשני צידי המדרון.

המסות מחוברות באמצעות חוט אידיאלי,

ודרך גלגלת אידיאלית המקובעת למדרון.

בין המסות למדרון קיים חיכוך.

המסות נעות במהירות קבועה עם כיוון השעון.

נתון:  $\mu_k, \theta_1, \theta_2, m_1$ .

מצא את  $m_2$ .



**תשובות סופיות:**

(1)  $\sum \vec{F} = (6.14, -2.04)$

(2)  $\sum \vec{F} = (-1.20, 0)$

(3)  $\sum F_x = -3.03N, \sum F_y = -3.47N$

(4) גודל:  $|\vec{F}| \approx 3.84N$ , כיוון:  $\theta_{F_3} = -3.14^\circ$ .

(5)  $T = 20N$

(6)  $T_1 = 21.96N, T_2 \approx 26.90N$

(7)  $T_1 \approx 26.30N, T_2 \approx 19.48N$

(8) א. גודל:  $N = 20$ , כיוון: כלפי מעלה.

ג. גודל:  $N = 20$ , כיוון: כלפי מטה.



(9) א.  $T = 50N$ . ב. גודל:  $T = 50N$ , כיוון: מטה.

ג. גודל:  $|\vec{F}| = 50$ , כיוון: מעלה.

(10)  $T = 50N$

א.  $N_{32} = 50$

ב.  $N_{21} = 20$



$m_1 \vec{a}$



$m_2 \vec{a}$

(11) א.

ד.  $N_{23} = 50N\hat{y}$

(12) א. גודל:  $N_{32} = 30N$ , כיוון: כלפי מעלה. ב. גודל:  $N_{43} = 60N$ , כיוון: כלפי מעלה.

(13) א.  $f_{s,max} = 12N$ . ב.  $\vec{f}_s = -10\hat{x}$

(14) א.  $f_{s,max} = 18N$ . ב.  $\vec{f}_s = -15\hat{x}_N$

(15) א.  $f_{s,max} = 15N$ . ב.  $t = 2.74sec$ . ג.



(16) א.  $F_{max} = 8.858N$ . ב.  $f_s = 4.330N$

(17)  $F_{Dani} = T = 40N$

(18)  $T \approx 41.41N$

א.  $F = 600.58N$

ב.  $F = 375.23N$

ג.  $F \approx 371.57N$

ד.  $F = 400N$

$$F = 18\text{N} \quad \text{ג.} \quad T = 6\text{N} \quad \text{ב.} \quad F_{\max} = 27\text{N} \quad \text{א.} \quad (20)$$

$$T = 8.86\text{N} \quad \text{ב.} \quad F_{\max} = 33.34\text{N} \quad \text{א.} \quad (21)$$

$$\theta = 45^\circ, F = 56.57\text{N} \quad \text{ב.} \quad T = 40\text{N} \quad \text{א.} \quad (22)$$

ג. לא.

$$T_2 = 0.4\text{N}, T_1 = 0.2\text{N} \quad \text{ב.} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad (23)$$

$$f_s = mg \cos 50^\circ \approx 19.28\text{N}, N \approx 22.98\text{N} \quad \text{ב.} \quad (24)$$



$$M_{\max} = 4.79\text{kg}, M_{\min} = 2.87\text{kg} \quad \text{ב.} \quad M = 3.83\text{kg} \quad \text{א.} \quad (25)$$

$$\alpha = \arctan(\mu_s) \quad \text{ב.} \quad \alpha = 11.31^\circ \quad \text{א.} \quad (26)$$

ג. ראה סרטון.

$$m_2 = m_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \quad (27)$$

$$m_2 = m_1 \left( \frac{-\mu_k \cos \theta_1 + \sin \theta_1}{\sin \theta_2 + \mu_k \cos \theta_2} \right) \quad (28)$$

## תרגילים נוספים לחוק ראשון ושלישי:

### שאלות:

#### (1) מסה מוצמדת לקיר

ארגז בעל מסה של 2 ק"ג מוצמד לקיר באמצעות כוח אופקי. מקדם החיכוך הסטטי בין הארגז לקיר הוא: 0.3.



- א. מה הגודל המינימלי של הכוח המאפשר לשמור על הארגז במנוחה?  
 ב. חזור על סעיף א' עבור המקרה בו הכוח פועל בזווית של  $30^\circ$  כלפי מעלה ביחס לאופק.

#### (2) כוח אופקי מיני ומקס על מסה בשיפוע

מסה:  $m = 2\text{kg}$  מונחת על מדרון משופע בעל זווית:  $\alpha = 37^\circ$ . מקדם החיכוך הסטטי בין המסה למדרון הוא:  $\mu_s = 0.15$ . כוח אופקי  $F$  פועל על המסה ומחזיק אותה במנוחה. מהו  $F$  המינימלי והמקסימאלי כך שהמסה תשאר במנוחה?



#### (3) קופסה עם כוח לא ידוע

קופסה בעלת מסה של 5 ק"ג מונחת על משטח אופקי. כוח של 20 ניוטון מושך את הקופסה ימינה במקביל לציר ה- $x$ . בין המשטח לקופסה קיים חיכוך, מקדם החיכוך הקינטי הוא:  $\mu_k = 0.2$ .



כוח נוסף מופעל על הקופסה אחורנית בזווית של  $45^\circ$ . מצא את גודלו של הכוח אם ידוע שהמסה נעה ימינה במהירות קבועה.

#### (4) מערכת גלגלות

במערכת הבאה כל הגלגלות והחוט הם אידיאליים. המסות  $m_1, m_2$  נתונות.

מצא את  $m_3$  ואת המתחויות בכל חוט, אם ידוע כי כל המערכת נמצאת במנוחה.

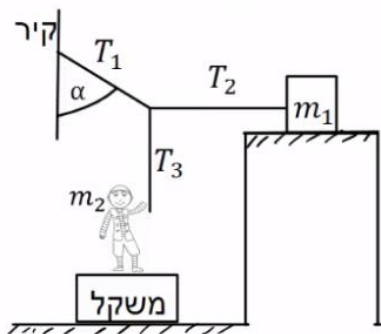


**(5) מסה על שולחן, מסה תלויה, טבעת וקיר**

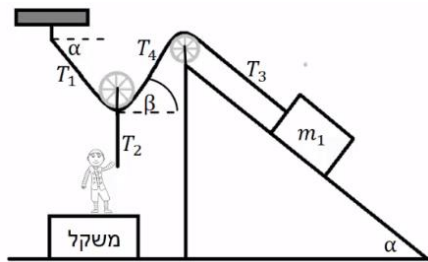

קופסה בעלת מסה  $M$  מונחת על שולחן. הקופסה קשורה בחוט אידיאלי לטבעת חסרת מסה. מסה  $m$  תלויה גם כן באמצעות חוט אידיאלי מהטבעת ונמצאת באוויר. חוט נוסף מחבר את הטבעת לקיר. ידוע כי מקדם החיכוך הסטטי בין המסה  $M$  לשולחן הוא:  $\mu_s$ , וכי כוח החיכוך הפועל על המסה במצב הנ"ל מקסימלי. מצא את המתוחות בכל חוט ואת הזווית בה מחובר החוט לקיר, אם:  $M, m, \mu_s$  נתונים.

**(6) מקדם חיכוך מינימלי וכוחות על השולחן**


קופסה בעלת מסה  $M$  מונחת על שולחן. הקופסה קשורה בחוט אידיאלי ודרך גלגלת אידיאלית לקופסה נוספת בעלת מסה  $m$  התלויה באוויר. בין השולחן לקופסה קיים חיכוך, מקדם החיכוך הסטטי אינו ידוע. א. מצא מהו ערכו המינימלי האפשרי של מקדם החיכוך הסטטי, אם ידוע שהמערכת נמצאת במנוחה. הנח שהמסות נתונות. ב. מהו הכוח שמפעיל המוט המחזיק את הגלגלת על הגלגלת? ג. מהו הכוח הכולל הפועל על השולחן מהמערכת (מסות והמוט שמחזיק את הגלגלת)? ד. מהו הכוח הנורמלי ומהו כוח החיכוך הפועלים על השולחן מהרצפה? (התייחס למסת השולחן כנתונה).

**(7) נער מושך בחוטים**


מסה  $m_1$  מונחת על משטח אופקי לא חלק. נער שמסתו  $m_2$  מושך את קצה החוט  $T_3$ , כך שהמסה  $m_1$  על סף תנועה. הנער עומד על משקל. נתון:  $\mu_s = 0.2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m_2 = 50\text{kg}$ . החוט  $T_2$  אופקי ו- $T_3$  אנכי. הוראת המשקל היא:  $450\text{N}$ . א. חשב את המתוחות בחוטים:  $T_1$ ,  $T_2$  ו- $T_3$ . ב. חשב את ערכה של מסה  $m_1$ .

**8) נער מושך בחוטים שוב**

מסה  $m_1$  מונחת על משטח משופע לא חלק.

נער שמסתו  $m_2$  מושך את קצה החוט  $T_2$ .

החוט  $T_2$  מחובר למרכז הגלגלת חסרת חיכוך ומסה. הנער עומד על משקל.

נתון:  $\mu_s = 0.2$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $m_1 = 80\text{kg}$ ,  $m_2 = 60\text{kg}$ .

החוט  $T_2$  מאונך ו-  $T_3$  מקביל למדרון.

הוראת המשקל היא:  $120\text{N}$ .

א. חשב את הזווית  $\beta$  (הזווית בין החוט לאופק).

ב. חשב את המתוחות בחוטים:  $T_1, T_2, T_4$ .

ג. מצא את גודלו וכיוונו של כוח החיכוך בין  $m_1$  למדרון.

**9) נער מושך בעגלה הקשורה למשקולת**

בתרשים שלפניך מוצגת מערכת.

אדם מושך עגלה שמסתה  $m_1 = 15\text{kg}$  באמצעות חוט.

החוט בזווית  $\alpha = 30^\circ$  עם הציר האופקי, ראה תרשים. החיכוך בין העגלה למשטח ניתן להזנחה.

לעגלה מחוברת משקולת  $m_2 = 25\text{kg}$ .

מקדם החיכוך בין המשקולת למשטח שווה  $\mu_k = 0.2$ .

מערכת הגופים נעים במהירות קבועה.

א. מהי המתוחות בחוט בין העגלה למשקולת?

ב. מהו הכוח שהאדם מושך את מסה  $m_1$ ?

**10) אדם הולך על קרש על מישור משופע \*\***

קרש שמסתו  $M$  מונח על מישור משופע חלק הנטוי בזווית  $\theta$ .

אדם שמסתו:  $m = 0.4M$  הולך על גבי הקרש.

בין האדם לקרש קיים חיכוך. הניחו שהכוח שמפעיל האדם על הקרש קבוע ושהמישור מקובע.

א. באיזה כיוון צריך האדם ללכת כך שהקרש יישאר במנוחה?

ב. מה צריכה להיות תאוצת האדם בסעיף א?

ג. מהו מקדם החיכוך הסטטי המינימלי המאפשר את המצב בסעיף א? (בהליכה החיכוך עם המשטח הוא סטטי למרות שיש תנועה)

ד. האדם משנה את הליכתו כך שעכשיו הוא נשאר במקום ביחס לקרקע והקרש נע ביחס לקרקע. מה כיוון הליכתו של האדם ומהי תאוצת המשטח במקרה זה?



### תשובות סופיות:

$$F \geq 26.32\text{N} \quad \text{ב.} \quad F_{\min} = 66.67\text{N} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$F_{\min} = 10.8\text{N}, F_{\max} = 20.4\text{N} \quad (2)$$

$$F \approx 17.68\text{N} \quad (3)$$

$$T_1 = (m_1 + m_2)g, T_2 = m_2g, T_3 = 2m_2g, T_4 = 2(m_1 + m_2), m_3 = 2m_2 \quad (4)$$

$$\cot \alpha = \frac{m}{\mu_s M} \quad (5)$$

$$\sum F_y = (-M + m)g \quad \text{ג.} \quad F = \sqrt{2}mg \quad \text{ב.} \quad \mu_{s_{\min}} = \frac{m}{M} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$N = -\sum F_y = (M + m)g + \tilde{M}g \quad \text{ד.}$$

$$m_1 = 14.5\text{kg} \quad \text{ב.} \quad T_1 = 57.7\text{N}, T_2 = 28.9\text{N}, T_3 = 50\text{N} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$T_2 = 480\text{N}, T_1 = T_4 \approx 373\text{N} \quad \text{ב.} \quad \beta = 40^\circ \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\text{ג.} \quad f_s = 141\text{N} \quad \text{כיוון: במעלה המדרון.}$$

$$T_1 = 57.7\text{N} \quad \text{ב.} \quad T_2 = 50\text{N} \quad (9)$$

$$\mu_{s_{\min}} = \frac{\tan \theta}{0.4} \quad \text{ג.} \quad \frac{7}{2}g \sin \theta \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{במורד המישור.} \quad (10)$$

$$\text{ד.} \quad \text{במעלה המישור.} \quad a = 1.4g \sin \theta$$

## חוק שני של ניוטון:

### שאלות:

#### (1) דוגמה 1

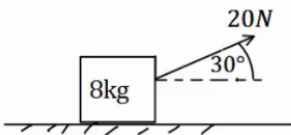


כוח של 20 ניוטון מופעל על ארגז בעל מסה של 10 ק"ג.  
 אין חיכוך בין הארגז לרצפה.

א. מצא את תאוצת הארגז.

ב. כמה זמן ייקח להזיז את הארגז למרחק של 30 מטרים באמצעות כוח זה, אם נתון שהארגז התחיל תנועתו ממנוחה?

#### (2) דוגמה 2



כוח של 20 ניוטון פועל בזווית של 30 מעלות מעל האופק.  
 הכוח מופעל על ארגז בעל מסה של 8 ק"ג.  
 הארגז נמצא במנוחה ונתון כי בין הארגז לרצפה קיים חיכוך.

מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי הם:  $\mu_s = 0.2, \mu_k = 0.1$ .

א. בדוק האם הארגז נשאר במנוחה או מתחיל לנוע.

ב. כמה זמן ייקח להזיז את הארגז למרחק של 30 מטרים באמצעות כוח זה?

ג. חזור על הסעיפים אם הכוח היה בזווית של 70 מעלות.

#### (3) מרחק עצירה

דני נוסע במכוניתו במהירות של 54 קמ"ש, ולפתע הוא מבחין כי רמזור הנמצא 50 מטרים לפניו הופך לאדום. דני לוחץ על הבלמים ומתחיל בעצירה.

מקדם החיכוך הקינטי בין הגלגלים לרצפה הוא:  $\mu_k = 0.3$ .

הנח שהגלגלים ננעלים ואין למכונית מערכת ABS.

א. האם דני יספיק לעצור לפני הרמזור?

ב. בדוק שוב האם דני יספיק לעצור, אך הפעם הוסף זמן תגובה של שנייה אחת (הזמן מהרגע שבו דני מבחין באור עד אשר הוא לוחץ על הבלמים).

#### (4) כוח קבוע נפסק בפתאומיות

מסה של 2 ק"ג נמצאת במנוחה על משטח אופקי.

ברגע  $t = 0$  מתחיל לפעול על המסה כוח אופקי של 10N.

המסה מתחילה לנוע בהשפעת הכוח במשך 4 שניות, ואז נפסק הכוח בפתאומיות.

מקדם החיכוך הקינטי בין המסה לקרקע הוא:  $\mu_k = 0.2$ .

א. מה המרחק אותו עבר הגוף עד ל-  $t = 4\text{sec}$ ?

ב. מהו המרחק הכולל אותו עבר הגוף עד לעצירתו שוב?

**(5) כוחות על מעלית**

מעלית עולה בתאוצה של 0.5 מטרים לשנייה בריבוע, באמצעות כבל הקשור לתקרתה. מסת המעלית היא 600 ק"ג.

- שרטט תרשים כוחות על המעלית.
- הקפד על הגודל היחסי של כל וקטור בשרטוט.
- שרטט את שקול הכוחות ואת וקטור התאוצה.
- מהי המתוחות בכבל?

**(6) משקל במעלית**

דני מודד את משקלו בתוך מעלית. משקלו כאשר המעלית במנוחה הוא 600 ניוטון.

- מהי מסתו של דני?
- מה יראה המשקל אם המעלית יורדת במהירות קבועה של 3 מטרים לשנייה?
- מה יראה המשקל אם המעלית עולה בתאוצה של 3 מטר לשנייה בריבוע?
- מה יראה המשקל אם המעלית יורדת בתאוצה של 3 מטר לשנייה בריבוע?
- מה יראה המשקל אם המעלית נופלת נפילה חופשית?

**(7) עוד משקל במעלית**

יוסי נמצא במעלית ומודד את מסתו באמצעות משקל. יוסי מודד פעם אחת כאשר המעלית נמצאת בתאוצה כלפי מעלה של 3 מטרים לשנייה בריבוע, ופעם אחת כאשר המעלית נמצאת בתאוצה כלפי מטה של 1 מטר לשנייה בריבוע. ההפרש בין המדידות הוא 12 ק"ג. מהי מסתו האמיתית של יוסי?

**(8) גרפים 1**

בגרף הבא נתון הכוח הפועל על גוף כתלות בזמן.

- מצא את תאוצת הגוף כתלות בזמן אם מסת הגוף היא 5 ק"ג.
- מצא את מהירות הגוף כתלות בזמן אם מהירותו ההתחלתית היא:  $v_0 = 0$ .
- מצא את מיקום הגוף כתלות בזמן אם המיקום ההתחלתי הוא:  $x_0 = 0$ .

**9) גרפים 2**

גוף בעל מסה של 3 ק"ג נע לאורך קו ישר. מהירות הגוף כתלות בזמן נתונה לפי הגרף הבא. מצא את שקול הכוחות הפועל על הגוף בכל רגע, ושרטט גרף של השקול כתלות בזמן.

**10) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה**

במערכת הבאה המסה  $m_2 = 5\text{kg}$  נמצאת על שולחן אופקי ומחוברת דרך חוט אידיאלי למסה התלויה באוויר  $m_1$ . בין השולחן ל- $m_2$  קיים חיכוך ומקדמי החיכוך הם:  $\mu_s = 0.3$ ,  $\mu_k = 0.2$ .

המערכת מתחילה ממנוחה וגובה המסה  $m_1$  מעל הקרקע הוא:  $3\text{m}$ .

א. מצא את גודלה המינימלי של  $m_1$ , עבורה המערכת תהיה בתנועה.

ב. הנח שגודלה של  $m_1$  כפול מזה שחישבת בסעיף הקודם.

מהן תאוצות המסות?

ג. כמה זמן ייקח למסה להגיע אל הקרקע?

ד. מהן מהירויות המסות ברגע זה?

**11) כוח מושך מסה שמושכת מסה**

מסה של 2 ק"ג נמצאת במנוחה על משטח אופקי. המסה מחוברת באמצעות חוט אידיאלי למסה נוספת של 3 ק"ג הנמצאת במנוחה על המשטח גם כן. כוח אופקי של 25 ניוטון מושך את המסה הראשונה כלפי ימין.

א. מצא את תאוצות המסות ואת המתיחות בחוט אם המשטח חלק (חסר חיכוך).

ב. חזור על סעיף א' במידה וקיים חיכוך בין המסות למשטח, ומקדם החיכוך

הקינטי הוא:  $\mu_k = 0.2$ .

**12) כוח מושך מסה שמושכת מסה שמושכת מסה**

מסה של 2 ק"ג נמצאת במנוחה על משטח אופקי. המסה מחוברת באמצעות

חוט אידיאלי למסה נוספת של 3 ק"ג הנמצאת במנוחה על המשטח גם כן.

המסה השנייה מחוברת למסה של 4 ק"ג בצורה דומה.

כוח אופקי של 60 ניוטון מושך את המסה הראשונה כלפי ימין.

א. מצא את תאוצות המסות ואת המתיחות בחוטים אם המשטח חלק (חסר חיכוך).

ב. חזור על סעיף א' במידה וקיים חיכוך בין המסות למשטח ומקדם

החיכוך הקינטי הוא:  $\mu_k = 0.2$ .

**13 שתי מסות תלויות**

במערכת הבאה שתי מסות שונות:  $m_1 = 3\text{kg}$ ,  $m_2 = 1\text{kg}$ .  
 המסות מחוברות באמצעות חוט אידיאלי ודרך גלגלות אידיאליות.  
 המערכת מתחילה ממנוחה וגובה המסה  $m_1$  מעל הקרקע הוא:  $2m$ .



- שרטט תרשים כוחות עבור כל מסה.
- חשב את תאוצת הגופים.
- לאיזה כיוון תתחיל המערכת לנוע?
- כמה זמן ייקח למסה להגיע אל הקרקע?
- מהי מהירות המסות ברגע זה?

**14 מדרון משופע בסיסי**

מסה מונחת על מדרון משופע בעל זווית  $\alpha$ .  
 אין חיכוך בין המסה למדרון.



- שרטט תרשים כוחות על המסה.
- בטא את תאוצת המסה באמצעות הזווית.
- רשום משוואת מיקום-זמן ומהירות-זמן של המסה.

**15 מדרון משופע עם חיכוך**

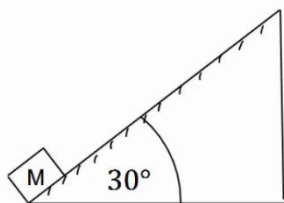
מסה  $M$  מונחת על מדרון משופע בגובה של 2 מטרים.  
 זווית השיפוע של המדרון היא  $45^\circ$  מעלות ומקדמי החיכוך  
 הסטטי והקינטי בין המסה למדרון הם:  $\mu_s = 0.2$ ,  $\mu_k = 0.1$ .



- האם המסה תתחיל להחליק או תישאר במנוחה?
- מצא תוך כמה זמן תגיע המסה לתחתית המדרון.  
 מהי מהירותה ברגע זה?

**16 מסה נזרקת במעלה המדרון**

מסה  $M$  נזרקת במעלה מדרון משופע במהירות התחלתית של:  $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ .  
 זווית המדרון היא  $30^\circ$  מעלות. מקדמי החיכוך הסטטי והקינטי בין המסה  
 למדרון הם:  $\mu_s = 0.25$ ,  $\mu_k = 0.2$ .



- מצא את תאוצת המסה.
- רשום משוואת מיקום-זמן עבור תנועת המסה.
- מתי מגיעה המסה לשיא גובה תנועתה על המדרון?
- האם המסה תיעצר בשיא הגובה?
- כמה זמן ייקח למסה לחזור לתחתית המדרון  
 מהרגע שבו התחילה תנועתה?

**17) מסה בשיפוע ומסה תלויה**

מסה של 5 ק"ג מונחת על מדרון משופע בעל זווית שיפוע של 50 מעלות. המסה מחוברת דרך חוט אידיאלי למסה של 2 ק"ג התלויה באוויר. אין חיכוך בין המסה למדרון. א. לאיזה כיוון תנוע המערכת? ב. מצא את תאוצת המערכת.

כעת הנח שקיים חיכוך ומקדמי החיכוך הם:  $\mu_s = 0.25$ ,  $\mu_k = 0.2$ .

ג. לאיזה כיוון יפעל החיכוך? האם החיכוך סטטי או קינטי?

ד. מצא שוב את תאוצת המערכת.

**18) שתי מסות שני שיפועים 2**

במערכת הבאה ישנו מדרון עם שיפוע שונה משני צידיו, זוויות השיפוע הן:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ .

שתי מסות שונות  $m_1$ ,  $m_2$  מונחות בשני צידי המדרון.

המסות מחוברות באמצעות חוט אידיאלי ודרך גלגלת אידיאלית המקובעת למדרון. אין חיכוך בין המסות למדרון.

נתון:  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_2 = 30^\circ$ ,  $m_1 = 2\text{kg}$ ,  $m_2 = 4\text{kg}$ .

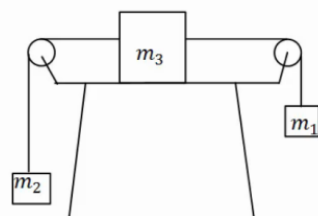
א. לאיזה כיוון תנוע המערכת?

ב. מצא את תאוצת המערכת.

כעת הנח שקיים חיכוך ומקדמי החיכוך הם:  $\mu_s = 0.25$ ,  $\mu_k = 0.2$ .

ג. לאיזה כיוון יפעל החיכוך והאם החיכוך סטטי או קינטי?

ד. מצא שוב את תאוצת המערכת.

**19) מסה על שולחן ושתי מסות תלויות**

מסה  $m_3$  מונחת על שולחן במנוחה.

המסה קשורה משני צידיה לחוטים אידיאליים.

כל חוט עובר דרך גלגלת ומחובר למסה שונה

התלויה באוויר (ראה איור).

הנח שהמסות לא פוגעות ברצפה.

נתון:  $m_1 = 14\text{kg}$ ,  $m_2 = 2\text{kg}$ ,  $m_3 = 4\text{kg}$ .

א. מצא את תאוצות המסות והמתיחות בחוטים אם אין חיכוך בין  $m_3$  לשולחן.

כעת הנח שיש חיכוך בין  $m_3$  לשולחן ומקדמי החיכוך הם:  $\mu_s = 0.25$ ,  $\mu_k = 0.2$ .

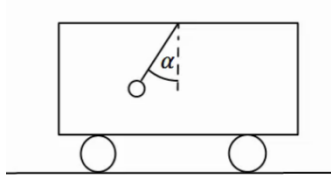
ב. האם המערכת תהיה במנוחה או בתנועה?

ג. מצא שוב את תאוצת הגופים והמתיחות בחוטים.

**20) זווית אופטימלית למשיכה**

כוח  $F$  מושך ארגז בעל מסה  $m$  בזווית  $\theta$  מעל האופק. מקדם החיכוך בין הארגז לקרקע הוא  $\mu_k$ .

- מצא את תאוצת הכוח כתלות בפרמטרים הרשומים בשאלה. (הנח כי יש תנועה והארגז לא מתרומם מעל הקרקע).
- הנח כי מקדם החיכוך הקינטי הוא 0.3. בדוק באילו מהערכים הבאים של הזווית יש את התאוצה הגבוהה ביותר:  $\theta = -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ .
- מצא את הזווית המדויקת בה התאוצה תהיה מקסימלית. השתמש בנגזרת.

**21) מטוטלת במכונית**

- מטוטלת קשורה לתקרת מכונית. המטוטלת נמצאת בזווית קבועה ונתונה  $\alpha$ , ביחס לאנך מתקרת המכונית.
- מצא מהי תאוצת המכונית (גודל וכיוון).
  - האם ניתן לדעת מה כיוון תנועת המכונית?

**22) מסה של 4 על עגלה של 10**

- מסה של 4 ק"ג מונחת מעל עגלה בעלת מסה של 10 ק"ג. החיכוך בין העגלה למשטח זניח. מקדם החיכוך הסטטי בין המסה לעגלה הוא:  $\mu_s = 0.2$ . כוח אופקי  $F$  מופעל על המסה התחתונה ימינה. מהו הכוח המקסימלי הניתן להפעיל כך שהמסה העליונה לא תחליק על העגלה.

**23) מסה מחליקה על עגלה**

- מסה  $m$  מונחת מעל עגלה בעלת מסה  $M$  הנמצאת במנוחה. המסה מונחת בקצה השמאלי של העגלה. נותנים למסה העליונה בלבד מהירות התחלתית  $v_0$ . בין המסה לגג העגלה קיים חיכוך והחיכוך בין העגלה למשטח זניח.



נתון:  $\mu_k = 0.2$ ,  $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ,  $M = 12\text{kg}$ ,  $m = 3\text{kg}$ .

- מצא את הביטוי למיקום ולמהירות של המסה כתלות בזמן.
- מצא את הביטוי למיקום והמהירות של העגלה כתלות בזמן.
- מהי המהירות הסופית של שני הגופים בהנחה שהמסה לא נופלת מהעגלה?

**24) מסה צמודה למשאית**

מסה  $m$  מונחת בצמוד לחלקה הקדמי של משאית. בין המסה למשטח קיים חיכוך. נתון:  $\mu_s, m$ . מהי התאוצה המינימלית הדרושה למשאית על מנת שהמסה לא תיפול?

**25) כוח דוחף שתי קופסאות צמודות**

שתי תיבות נמצאות צמודות זו לזו על משטח אופקי חסר חיכוך. מסות התיבות הן:  $m_1 = 3\text{kg}$  ו-  $m_2 = 5\text{kg}$ . כוח אופקי דוחף את תיבה 2 שדוחפת את תיבה אחת כפי שמתואר בתרשים. גודל הכוח הוא:  $F = 16\text{N}$ . חשב את:



- התאוצה של כל תיבה.
- הכוח הנורמלי  $N_{1 \rightarrow 2}$  שבו התיבה הראשונה דוחפת את השנייה.
- הכוח הנורמלי  $N_{2 \rightarrow 1}$  שבו התיבה השנייה דוחפת את הראשונה.

**26) קופסה בין מדרונות**

קופסה קטנה עם גלגלים מונחת על מישור משופע בעל זווית של  $45^\circ$  מעלות. הקופסה משוחררת ממנוחה מגובה של  $3\text{m}$  מטרים ומתחילה בתנועה. בתחתית המדרון הקופסה עוברת למדרון משופע אחר בעל זווית של  $30^\circ$  מעלות. הזנח אפקטים המתרחשים בעת המעבר והנח כי גודל מהירות הקופסה במעבר בין המדרונות נשאר זהה.



- מהו הגובה המקסימלי אליו תגיע הקופסה במדרון השני? נחש מה יקרה לאחר מכן.
- חזור על סעיף א' אם נהג הקופסה שכח לשחרר את מעצור היד של הגלגלים וקיים חיכוך קינטי בין הקופסה למשטח. מקדם החיכוך הוא:  $\mu_k = 0.2$ .

**27) זריקה אופקית על מישור משופע**

מישור משופע חלק ABCD יוצר זווית של  $30^\circ$  מעלות עם הקרקע. הנקודה E נמצאת במרחק  $5\text{m}$  מהצלע AB ובמרחק  $2\text{m}$  מהצלע BC. מן הנקודה E נזרק כדור קטן על הלוח במהירות התחלתית  $v_0$  שכיוונה מקביל לצלע AB.



- צייר מערכת צירים ורשום את הכוחות הפועלים על הכדור בעת תנועתו על הלוח בכל ציר.
- מהי צורת המסלול של הכדור על הלוח?
- מצא את  $v_0$  עבורה הכדור יגיע בדיוק לנקודה B.
- מהי מהירות הכדור בנקודה B עבור ה-  $v_0$  שמצאת בסעיף ג'?

**28) גוף על גוף במישור משופע**

גוף A בעל מסה  $m_A$  וגוף B בעל מסה  $m_B$  מחוברים באמצעות חוט וגלגלת כמתואר באיור. גוף A מונח על מישור משופע חלק בעל זווית  $\alpha$ . גוף C בעל מסה  $m_C$  מונח על גוף A. מקדם החיכוך הסטטי בין הגופים ל-C הוא  $\mu_s$ . הבא את התשובות באמצעות:  $m_A, m_C, \alpha, \mu_s$ .

- מהי המסה המרבית של גוף B כך שגוף C וגוף A ינועו יחדיו במעלה המישור?
- מהי תאוצת הגופים והמתיחות בחוט אם המסה של גוף B היא זאת שמצאת בסעיף א' (או טיפה קטנה ממנה)?
- מהן תאוצות הגופים אם המסה של גוף B גדולה מזו שמצאת בסעיף א' ומקדם החיכוך הקינטי הוא  $\mu_k$ ?

**29) גליל על שני ארגזים**

גליל אחיד שמסתו  $m$  מונח על שני ארגזים שמסותיהם:  $m_A = m$  ו-  $m_B = 2m$ . לארגזים גבהים שונים והם מונחים על משטח אופקי. בין הגליל לארגזים אין חיכוך. כשהמערכת נמצאת בשיווי משקל יוצרים רדיוסי הגליל הנוגעים בפניות הארגזים זוויות של  $\alpha = 30^\circ$  ו-  $\beta = 45^\circ$  עם האנך לקרקע, ראה איור. נתונים:  $g, m$ .

- מה הכוח שמפעיל כל ארגז על הגליל?
- בהנחה שקיים אותו מקדם חיכוך בין הארגזים והמשטח, מהו גודלו המינימלי של מקדם החיכוך כך שהמערכת תישאר בשיווי משקל?

**30) כוח דוחף גוף על גוף**

שני גופים זהים שמסותיהם:  $m_1 = m_2 = m$  מונחים זה על גבי זה על גבי שולחן אופקי חלק (ראה איור). בין הגופים קיים חיכוך ומקדמי החיכוך הקינטי והסטטי הם:  $\mu_s, \mu_k$ . כוח חיצוני  $\vec{F}$  מופעל על הגוף העליון בזווית  $\alpha$  מתחת לאופק. הביעו את תשובתכם באמצעות הפרמטרים:  $F, \alpha, m, g, \mu_s, \mu_k$ .

- בהנחה שהגופים נעים יחדיו מהי התאוצה המשותפת?
- בהנחה שהגופים נעים יחדיו מהו גודלו של כוח החיכוך בין הגופים?
- מהו גודלו המקסימלי של  $\vec{F}$  כך שהגופים ינועו יחדיו?
- נתון כי:  $\mu_s = 0.2, \mu_k = 0.15, \alpha = 30^\circ$ .

מצא את תאוצת כל גוף כאשר הכוח הדוחף הוא:  $F = \frac{1}{2}mg$ .

ה. חזור על סעיף ד' כאשר:  $F = 3mg$ .

**31) מסה על מסה מחוברות בגלגלת**

- נתונה מערכת הכוללת שני גופים :  $m_1 = 4\text{kg}$  ,  $m_2 = 3\text{kg}$   
 הגופים קשורים על ידי חוט וגלגלת אידאלית ומונחים על מישור משופע בעל זווית  $\alpha = 30^\circ$ .  
 מקדמי החיכוך בין הגופים הם :  $\mu_k = \mu_s = 0.4$ .  
 מקדמי החיכוך עם המישור הם :  $\mu_k = \mu_s = 0.3$ .  
 כוח אופקי F פועל על  $m_2$ .

- א. מהו F המקסימלי כך שהגופים יישארו במנוחה?  
 ב. אם  $F = 40\text{N}$  מהי תאוצת הגופים?

**32) זריקה אופקית בהשפעת רוח\***

- כדור נזרק מגג בניין גבוה מאוד שגובהו 80 מטרים.  
 הכדור נזרק אופקית במהירות של 50 מטר לשנייה.  
 2 שניות לאחר הזריקה מתחילה לנשוב רוח שמפעילה כוח F קבוע ואופקי בכיוון המנוגד למהירות ההתחלתית.  
 מסת הכדור היא 500 גרם.

א. ענה :

- i. האם הרוח משפיעה על הזמן שלוקח לכדור להגיע לקרקע?  
 ii. האם הרוח משפיעה על מהירות הפגיעה של הכדור בקרקע?  
 ב. נתון שהחבילה פוגעת בקרקע בזווית של 32 מעלות עם האנך לקרקע.  
 i. חשב את גודלו של הכוח F.  
 ii. שרטט גרפים של רכיבי המהירות כתלות בזמן עד לפגיעה בקרקע.  
 ג. מהי הסטייה של הכדור בפגיעתו בקרקע בעקבות הרוח?

**33) מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה וכוח\***

- המערכת שמתוארת בתרשים משוחררת ממנוחה ונעה ימינה. הזניחו את מסת החוט ואת כל כוחות החיכוך. כעבור 2 שניות נקרע החוט והכוח F ממשיך לפעול. נתון :  $m_1 = 6\text{kg}$ ,  $F = 15\text{N}$ .  
 הגרף באיור מתאר את התאוצה של  $m_1$  כפונקציה של הזמן עבור 4 השניות הראשונות של התנועה. הכיוון החיובי הוא ימינה.

א. עבור 2 השניות הראשונות של התנועה :



- i. שרטטו את הכוחות הפועלים על כל גוף.  
 ii. רשמו את המיקום כתלות בזמן של  $m_1$ .  
 iii. חשבו את  $m_2$  ואת המתיחות בחוט.

- ב. האם  $m_1$  שינתה את כיוון תנועתה במהלך 4 השניות הראשונות? נמקו אם כן או לא. במידה וכן מצא את הזמן והמרחק בו התרחש השינוי.
- ג. שרטטו את המהירות כתלות בזמן עבור  $m_1$  ב-4 השניות של התנועה.
- ד. אם המשטח לא היה חלק, מהו מקדם החיכוך הסטטי המינימלי עבורו המערכת הייתה נשארת במנוחה?

### 34 חבילת סיוע לצוות רפואי



מסוק נשלח להטיל מהאוויר חבילה המכילה ציוד חיוני לצוות רפואי שנמצא על הקרקע. מסת החבילה 15 ק"ג ובעת הטלתה המסוק

$$v_0 = 198 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

טס אופקית במהירות: בגובה 90 מטר מעל הקרקע. 2 שניות אחרי תחילת נפילתה של החבילה החלה לנשוב רוח

שהפעילה על החבילה כוח אופקי  $F$  קבוע בכיוון המנוגד ל- $v_0$ . התייחסו לחבילה כאל גוף נקודתי.

הניחו כי פרט לכוח  $F$  האוויר אינו מפעיל שום כוח נוסף.

א. האם הרוח (המתבטאת כאן בכוח  $F$  קבוע שהחל לפעול 2 שניות לאחר תחילת התנועה) משפיעה על ערכם של:

i. הזמן שלקח לחבילה להגיע לקרקע? נמק.

ii. מהירות הפגיעה של החבילה בקרקע? נמק.

ב. חשבו את הכוח  $F$  אם נתון שהחבילה פגעה בקרקע בזווית 45 מעלות ממישור הקרקע האופקי.

ג. שרטטו במערכת צירים משותפת גרף מהירות-זמן של שני רכיבי מהירות החבילה  $v_x$  ו- $v_y$  מרגע השחרור ועד הפגיעה בקרקע.

ד. בכמה מטרים הייתה מוסטת נקודת הפגיעה של החבילה בקרקע אילו לא נשבה רוח במהלך תנועתה?

### 35 שתי מסות מחוברות בחוט על מישור משופע

שני גופים בעלי מסה זהה  $m$  קשורים בחוט ונמצאים על מדרון משופע לא חלק בעל זווית  $\alpha$ .

משחררים את הגופים ממנוחה והם מתחילים להחליק במורד המדרון. מקדם החיכוך הקינטי בין שני הגופים

למשטח הוא  $\mu_k$ .

מצאו את המתוחות בחוט במהלך התנועה.



**36 מכונת אטווד משופעת**

תלמידים בנו מכונת אטווד "משופעת".

שתי העגלות נעות ללא חיכוך על לוחות משופעים כשהן קשורות בחוט שעובר דרך גלגלת שמסתה זניחה. זווית השיפוע  $\alpha$  ניתנת לשינוי.

מסות הגופים הן:  $m_1 = 3\text{kg}$ ,  $m_2 = 6\text{kg}$ .

בטאו תשובותיכם בסעיפים א', ב', ג' באמצעות  $\alpha$ .

א. תלמידה מחזיקה את העגלה  $m_2$  כך שלא תזוז.

מהי המתוחות בחוט?

ב. התלמידה משחררת את המסה  $m_2$ .

מהי תאוצת הגופים ומהי המתוחות בחוט כעת?

ג. החוט יכול לשאת עומס מקסימאלי של  $25\text{N}$ .

מהו הערך המירבי של  $\alpha$  עבורו החוט לא ייקרע?

ד. בהנחה כי כעת מחובר חוט היכול לעמוד במתיחויות גדולות מאוד,

מהי הזווית  $\alpha$  עבורה תאוצת הגופים היא מקסימאלית?

ה. מדוע הגדלה נוספת של הזווית מעבר לזווית שמצאתם בסעיף ד', לא

תמשיך ותגדיל את תאוצת הגופים ולא את המתוחות בחוט?

הניחו בסעיפים ד' ו-ה כי המרחק בין הלוחות גם הוא גדול מאוד ביחס לאורך החוט.

## תשובות סופיות:

$$a_x = 2 \frac{m}{\text{sec}^2} \quad \text{א.} \quad t = \sqrt{30} \text{ sec} \quad \text{ב.} \quad (1)$$

$$t \approx 6.82 \text{ sec} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הגוף לא יכול להיות במנוחה.} \quad (2)$$

ג. סעיף א': נשאר במנוחה, סעיף ב': אין משמעות.

$$\Delta x \approx 37.5 \text{ m} < 50 \text{ m} \quad \text{א. כן, כי} \quad \Delta x = 52.5 \text{ m} > 50 \text{ m} \quad \text{ב. לא, כי} \quad (3)$$

$$x(t=4) = 24 \text{ m} \quad \text{א.} \quad x_F = 60 \text{ m} \quad \text{ב.} \quad (4)$$

$$T = 6300 \text{ N} \quad \text{ג.} \quad (5)$$



$$m_{\text{Dani}} = 60 \text{ kg} \quad \text{א.} \quad m_{\text{Dani}} = 78 \text{ kg} \quad \text{ג.} \quad \text{ב. כמו סעיף א'.} \quad (6)$$

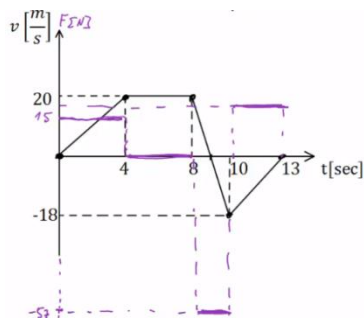
$$m_{\text{Dani}} = 42 \text{ kg} \quad \text{ד.} \quad \text{ה. } 0$$

$$m_{\text{Yossi}} = 30 \text{ kg} \quad (7)$$

$$v(t) = \begin{cases} \frac{4}{5}t & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{12}{5} + \frac{6}{5}(t-3) & 3 \leq t \leq 6 \\ 6 - \frac{2}{5}(t-6) & 6 \leq t \leq 8 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad a = \begin{cases} \frac{4}{5} \frac{m}{\text{sec}^2} & 0 < t < 3 \\ \frac{6}{5} \frac{m}{\text{sec}^2} & 3 < t < 6 \\ -\frac{2}{5} & 6 < t < 8 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}t^2 & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{18}{5} + \frac{12}{5}(t-3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}(t-3)^2 & 3 \leq t \leq 6 \\ \frac{81}{5} + 6(t-6) + \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{5} \right) (t-6)^2 & 6 \leq t \leq 8 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\text{שקול הכוחות: } \sum F = 18 \text{ N}, \quad \text{גרף:} \quad (9)$$



(10) א.  $m_{\min} = 1.5\text{kg}$     ב.  $a = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$     ג.  $t \approx 1.55\text{sec}$

ד.  $v_1(t=1.55) \approx 3.87 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{y}$  ,  $v_2(t=1.55) \approx 3.87 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \hat{x}$

(11) א. תאוצה:  $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ , מתיחות:  $T = 15\text{N}$  . ב. תאוצה:  $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ , מתיחות:  $T = 15\text{N}$  .

(12) א. תאוצה:  $a \approx 6.67 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ , מתיחות:  $T = 46.68\text{N}$  .

ב. תאוצה:  $a \approx 4.67 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$  .

(13) א.    ב.  $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$     ג.  $m_1$  תרד כלפי מטה.



ד.  $t = \sqrt{\frac{4}{5}} \text{sec}$     ה.  $v(t=0.89) \approx 4.47 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ב.  $a_x = g \sin \alpha$  . ג. מיקום-זמן:  $x(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$

מהירות-זמן:  $v(t) = g \sin \alpha \cdot t$



(15) א. תתחיל להחליק.    ב. הזמן:  $t \approx 0.94\text{sec}$ , המהירות:  $v(t=0.94) \approx 6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  .

(16) א.  $a = -g(\mu_k \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \approx -6.73 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$  . ב.  $x(t) = 0 + 20 \cdot t - \frac{6.73}{2} \cdot t^2$

ג.  $t \approx 2.97\text{sec}$     ד. לא.    ה.  $t = 6.24\text{sec}$

(17) א. לכיוון המסה הגדולה יותר.    ב.  $a \approx 2.61 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

ג. סטטי, המערכת בתנועה.    ד.  $a \approx 1.7 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

(18) א. בכיוון  $m_2$  .    ב.  $a \approx 0.98 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$  .    ג. בכיוון  $m_1$ , סטטי.    ד. אין.

(19) א. תאוצה:  $a = 6 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ , מתיחות:  $T_{m_1} = 56\text{N}$ ,  $T_{m_2} = 32\text{N}$  .    ב. בתנועה.

ג.  $a = 5.6 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

$$\theta_0 \approx 16.6992^\circ \quad \text{ג.} \quad \theta = 20^\circ \quad \text{ב.} \quad a = \frac{F}{m}(\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \theta_k g \quad \text{א. (20)}$$

$$\text{ב. לא.} \quad \text{א. גודל: } a_x = g \tan \alpha, \text{ כיוון: חיובי. (21)}$$

$$F = \mu_s (m_1 + m_2) g = 28\text{N} \quad \text{(22)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2, \quad v(t) = \frac{1}{2} \cdot t \quad \text{ב.} \quad x(t) = 20 \cdot t - \frac{2}{2} t^2, \quad v(t) = 20 - 2 \cdot t \quad \text{א. (23)}$$

$$v(t=8) = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.}$$

$$a_{\min} = \frac{g}{\mu_s} \quad \text{(24)}$$

$$\vec{N}_{2 \rightarrow 1} = 6\text{N}^{\hat{x}} \quad \text{ג.} \quad N_{1 \rightarrow 2} = 6\text{N} \quad \text{ב.} \quad a = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{א. (25)}$$

$$h_{\max} = 1.78\text{m} \quad \text{ב.} \quad h_{\max} = 3\text{m} \quad \text{א. (26)}$$



$$\sum F_z = N - mg \cos 30^\circ, \quad \sum F_y = mg \sin 30^\circ, \quad \sum F_x = 0 \quad \text{א. (27)}$$

$$v_y(t_B) \approx 7.07 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ד.} \quad v_0 = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad \text{ב. פרבולה.}$$

$$m_{B\max} = \frac{(m_A + m_C) \mu_s \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \mu_s \cos \alpha} \quad \text{א. (28)}$$

$$a = g(\mu_s \cos \alpha - \sin \alpha), \quad T = g(m_A + m_C) \mu_s \cos \alpha \quad \text{ב.}$$

$$a_C = (\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha) g, \quad a_B = g \frac{(m_B - \mu_k m_C \cos \alpha - m_A \sin \alpha)}{m_A + m_B} \quad \text{ג.}$$

$$\mu_s \geq 0.224 \quad \text{ב.} \quad N_B = 0.518\text{mg}, \quad N_A = 0.732\text{mg} \quad \text{א. (29)}$$

$$F_{\max} = \frac{2\mu_s mg}{\cos \alpha - 2\mu_s \sin \alpha} \quad \text{ג.} \quad f_s = \frac{F \cos \alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad a = \frac{F \cos \alpha}{2m} \quad \text{א. (30)}$$

$$a_1 = 22.2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad a_2 = 3.75 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ה.} \quad a \approx 2.17 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ד.}$$

$$a = 1.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב.} \quad F_{\max} = 31.05\text{N} \quad \text{א. (31)}$$

$$F = 6.25\text{N} \quad \text{i.} \quad \text{ii. משפיעה.} \quad \text{א. i. אינה משפיעה. (32)}$$

$$v_x(t) = \begin{cases} 50 & 0 < t < 2 \\ 50 - 12.5(t-2) & 2 < t < 4 \end{cases}$$



$$v_y(t) = -10 \cdot t \quad \text{ii.}$$



$$\sigma_x = 25\text{m} \quad \text{ג.}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad \text{.ii}$$

33 א.i.



$$T = 21\text{N}, m_2 = 2.33\text{kg} \quad \text{.iii}$$

ב. כן, מכיוון שהשטח השלילי מתחת לגרף גדול מהשטח החיובי המהיר תשנה כיוון.

שינוי הכיוון:  $x = 2.8\text{m}$ ,  $t = 2.8\text{sec}$ .

$$\mu_{s \min} = 0.25 \quad \text{.ד}$$



ג.

$$F \approx 84.1\text{N} \quad \text{.ב}$$

$$\Delta x = 14\text{m} \quad \text{.ד}$$

34 א.i. לא משפיעה. ii. משפיעה.



ג.

$$T = 0 \quad \text{(35)}$$

$$\alpha_{\max} = 90^\circ \quad \text{.ד}$$

$$\alpha_{\max} = 38.7^\circ \quad \text{.ג}$$

$$a = 3.35 \sin \alpha \quad \text{.ב}$$

$$T = 30 \sin \alpha \quad \text{(36)}$$

ה. המסות יתנתקו מהמשטח ויהיו תלויות אנכית, התאוצה תישאר אותו דבר כמו בזווית של  $90^\circ$ .

## הכוח האלסטי - קפיץ:

### שאלות:

#### (1) דוגמה 1

גוף בעל מסה של 2 ק"ג מחובר לקפיץ בעל קבוע קפיץ:  $k = 50 \frac{N}{m}$ .



בין הגוף למשטח אין חיכוך.

א. מושכים את הגוף למרחק 5 ס"מ מהנקודה בה הקפיץ רפוי ומשחררים אותו. מהי תאוצת הגוף (גודל וכיוון)?

ב. דוחפים את הגוף למרחק 10 ס"מ מהנקודה בה הקפיץ רפוי ומשחררים אותו. מהי תאוצת הגוף (גודל וכיוון)?

כעת נתון כי בין הגוף למשטח קיים חיכוך, ומקדם החיכוך הסטטי הוא:  $\mu_s = 0.2$ .

ג. מהו המרחק המקסימלי בו ניתן להניח את הגוף קשור לקפיץ כך שישאר במנוחה?

#### (2) דוגמה 2

גוף בעל מסה של 3 ק"ג מחובר לקפיץ בעל קבוע קפיץ:  $k = 100 \frac{N}{m}$ .



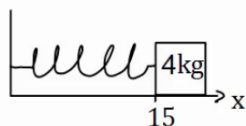
בין הגוף למשטח אין חיכוך.

על הגוף פועל כוח ימינה שגודלו 50 ניוטון.

קבע את ראשית הצירים בנקודת הרפיון של הקפיץ. היכן נמצאת נקודת שיווי המשקל? (הנקודה בה סכום הכוחות שווה לאפס).

#### (3) דוגמה 3

גוף בעל מסה של 4 ק"ג מחובר לקיר באמצעות קפיץ בעל



קבוע קפיץ:  $k = 50 \frac{N}{m}$ .

בין הגוף למשטח אין חיכוך.

אורכו הרפוי של הקפיץ הוא 10 ס"מ.

א. חשב את הכוח שמפעיל הקפיץ על הגוף כאשר הגוף במרחק 15 ס"מ מהקיר.

ב. חשב את הכוח שמפעיל הקפיץ על הגוף כאשר הגוף במרחק 6 ס"מ מהקיר.

ג. חשב את תאוצת הגוף בכל נקודה אם על הגוף פועל כוח שגודלו 10 ניוטון שמאלה.

**4) שיטה למדידת קבוע קפיץ**

- מסה  $m$  תלויה מהתקרה באמצעות קפיץ שאורכו הרפוי הוא  $l_0$ . משחררים את המסה לאט לאט עד אשר היא מגיעה לנקודה בה היא תלויה לבד במנוחה.
- א. מה מיוחד בנקודה זו?
- ב. מודדים את מרחק המסה מהתקרה בנקודה זו. מצא באמצעות מרחק זה והפרמטרים בשאלה את קבוע הקפיץ.

**5) מסה קשורה לחוט שמחובר לקפיץ אופקי**

- מסה  $m = 5gr$  תלויה באמצעות חוט, העובר דרך גלגלת אידיאלית ומחובר בצידו השני לקפיץ. הקפיץ מחובר לקיר בצורה אופקית. קבוע הקפיץ הוא:  $k = 10 \frac{N}{m}$ .



- א. משחררים את המסה בנקודה בה היא נשאר במנוחה. מצא את התארכות הקפיץ.
- ב. מושכים את המסה 5 ס"מ נוספים ומשחררים. מהי תאוצת המסה ברגע השחרור?

**6) קפיץ בשיפוע**

- מסה  $m$  נמצאת במנוחה על מישור משופע בעל זווית  $\alpha$ . מצד המסה מחובר קפיץ בעל קבוע קפיץ  $k$ . אין חיכוך בין המסה למשטח. בכמה מכוון הקפיץ ממצבו הרפוי? התייחס לפרמטרים בשאלה כנתונים.

**7) מסה מחוברת לקפיץ דרך גלגלת בתקרה**

- מסה  $m$  מחוברת לקפיץ אידיאלי (חסר מסה) דרך גלגלת אידיאלית המחוברת לתקרה. הקפיץ מחובר לקרקע וקבוע הקפיץ הוא  $k$ . מצא את התארכות הקפיץ אם נתון שהמסה בשיווי משקל.

**8) שתי מסות משני צידי השולחן וקפיץ באמצע**

- במערכת הבאה שתי מסות זהות  $m$  תלויות משני צידי השולחן באמצעות חוטים וגלגלות אידיאליים. באמצע החוט ישנו קפיץ בעל קבוע קפיץ  $k$ . מצא את התארכות הקפיץ.



**9) שתי מסות משני צידי השולחן וקפיץ באמצע בתאוצה**

במערכת הבאה שתי מסות שונות:  $m_1 = 3\text{kg}$ ,  $m_2 = 1\text{kg}$ , תלויות משני צידי השולחן באמצעות חוטים וגלגלות אידיאליים.

באמצע החוט ישנו קפיץ חסר מסה בעל קבוע קפיץ:  $k = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

הנח כי אורך הקפיץ קבוע במהלך התנועה.

א. מצא את תאוצת המערכת.

ב. מצא את התארכות הקפיץ.

**10) מסה תלויה ומתיחה**

מסה תלויה במנוחה מהתקרה באמצעות קפיץ אידיאלי.

נתון:  $m = 2\text{kg}$ ,  $k = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

א. מהי תאוצת המסה אם מושכים את המסה 5 ס"מ כלפי מטה?

ב. מהי תאוצת המסה אם מרימים את המסה 2 ס"מ כלפי מעלה?

**11) מסות תלויות מהתקרה עם קפיץ בתאוצה**

במערכת הבאה שתי מסות תלויות מהתקרה באמצעות גלגלת אידיאלית.

בין המסות יש קפיץ חסר מסה בעל קבוע קפיץ:  $k = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

הנח כי אורך הקפיץ קבוע במהלך התנועה.

א. מהי תאוצת המסות?

ב. מהי ההתארכות של הקפיץ?

**12) קפיץ במכונית נוסעת**

מסה  $m = 5\text{kg}$  נמצאת על רצפת מכונית.

המסה מחוברת באמצעות קפיץ חסר מסה לצד המכונית, ויכולה לנוע על הרצפה ללא חיכוך.

קבוע הקפיץ הוא:  $k = 30 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

הנח שאורך הקפיץ קבוע.

א. מהי התארכות הקפיץ אם המכונית נוסעת במהירות קבועה?

ב. מהי ההתארכות בקפיץ אם המכונית נעה בתאוצה קבועה של 2 מטר

לשנייה בריבוע ימינה? ציין האם הקפיץ נמתח או מתכווץ.

ג. מהי ההתארכות בקפיץ אם המכונית נעה בתאוצה קבועה של 3 מטר

לשנייה בריבוע שמאלה? ציין האם הקפיץ נמתח או מתכווץ.

**13) מסה עם שלושה קפיצים**

שלושה קפיצים מחוברים למסה  $m = 2\text{kg}$ , כפי שנראה באיור. אין חיכוך בין המסה לרצפה.



נתון כי:  $k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $k_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $k_3 = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

הנח כי כל הקפיצים רפויים באותה הנקודה. מהי תאוצת המסה כאשר היא נמצאת במרחק 20 ס"מ מנקודת שיווי המשקל?

**14) שלושה קפיצים שוב**

באיור הבא המסה  $m = 4\text{kg}$  מחוברת לשלושה קפיצים בעלי קבועי קפיץ שונים. הנח שכל הקפיצים רפויים כאשר המסה נמצאת ב- $x = 0$ .

מהי תאוצת המסה כאשר מיקומה הוא:  $x = 0.2\text{m}$

אם קבועי הקפיצים הם:  $k_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $k_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $k_3 = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. גודל: } -1.25 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \text{ הכיוון חיובי. ב. גודל: } 2.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \text{ הכיוון חיובי.}$$

$$\text{ג. } x = 8 \text{ cm}$$

$$(2) \quad x = \frac{1}{2} \text{ m}$$

$$(3) \quad \text{א. } F = -2.5 \text{ N} \quad \text{ב. } F = 2 \text{ N} \quad \text{ג. סעיף א': } a = -3.13 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \text{ סעיף ב': } a = -2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

$$(4) \quad \text{א. נקודת שיווי משקל. ב. } k = \frac{mg}{d - l_0}$$

$$(5) \quad \text{א. } \Delta x = 5 \text{ cm} \quad \text{ב. } a = -10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$(6) \quad |\Delta x| = \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

$$(7) \quad \Delta x = \frac{mg}{k}$$

$$(8) \quad |\Delta x| = \frac{mg}{k}$$

$$(9) \quad \text{א. } a = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב. } \Delta x = \frac{3}{4} \text{ m}$$

$$(10) \quad \text{א. } a = -0.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב. } a = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$(11) \quad \text{א. } a = \frac{10}{7} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב. } \Delta x \approx 0.69 \text{ m}$$

$$(12) \quad \text{א. } \Delta x = 0 \quad \text{ב. } |\Delta x| = \frac{1}{3} \text{ m, מתארך. ג. } |\Delta x| = \frac{1}{2} \text{ m, מתכווץ.}$$

$$(13) \quad a = -2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$(14) \quad a \approx 0.326 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

## תאוצות לא שוות:

### שאלות:

#### (1) מסה במדרון ומסה אופקית

- המסות  $m_1$  ו- $m_2$  מחוברות על ידי חוטים וגלגלות אידאליים, ראה איור. המישור המשופע עליו מונחת המסה  $m_1$  חסר חיכוך בעוד שהמישור האופקי עליו מונחת  $m_2$  הוא משטח בעל חיכוך עם מקדם חיכוך סטטי/קינטי  $\mu$ .
- א. קבל ביטוי פרמטרי עבור הערך של  $m_2$  מעליו המערכת תמצא בשיווי משקל.  
 ב. מהו ערך זה עבור הנתונים:  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $m_1 = 5\text{kg}$ .  
 ג. אם  $m_2$  קטן מהערך שחישבת בסעיפים הקודמים, מה תהיה תאוצת כל גוף במערכת (קבל ביטוי פרמטרי)?  
 ד. חשב את התאוצה עבור  $m_2 = 1\text{kg}$ .



### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } m_2 = \frac{m_1 \sin \theta}{2\mu}$$

$$\text{ב. } m_2 = 6.25\text{kg}$$

$$\text{ג. } a_1 = \frac{m_1 g \sin \theta - 2\mu m_2 g}{4m_2 + m_1}, \quad a_2 = \frac{2m_1 g \sin \theta - 4\mu m_2 g}{4m_2 + m_1}$$

$$\text{ד. } a_1 = 2.33 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad a_2 = 4.67 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$