פיזיקה חשמל מס קורס 4411010

פרק 4 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 1

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, כאשר

T – המתיחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\Psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)+B\sin(kx-\omega t)+C\cos(kx+\omega t)+$$
$$+D\sin(kx+\omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega=v\cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\Psi(x,t)=A_1\cos(kx-\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(kx+\omega t+\varphi_2)=$$
$$=\mathrm{B_1}\cos\mathrm{kx}\cos\omega\mathrm{t}+\mathrm{B_2}\cos\mathrm{kx}\sin\omega\mathrm{t}+\mathrm{B_3}\sin\mathrm{kx}\cos\omega\mathrm{t}+\mathrm{B_4}\sin\mathrm{kx}\sin\omega\mathrm{t}=$$
$$=\mathrm{C_1}\cos\mathrm{kx}\cos(\omega\mathrm{t}+\varphi_1)+\mathrm{C_2}\sin\mathrm{kx}\cos(\omega\mathrm{t}+\varphi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים(לא בחומר, העשרה בלבד)

$$\psi(x,t)=A_1e^{i(kx+\omega t)}+A_2e^{i(kx-\omega t)}+A_3e^{-i(kx+\omega t)}+A_4e^{-i(kx-\omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3=A_1^*$ ו-$A_4=A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}+Be^{-i(kx+\omega t)}$$

שאלות

1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$.
נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2m$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות).
חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2 \times 10^{-4}\frac{\text{kg}}{m}$, במיתר מעורר גל מהצורה: $\psi(x,t) = 0.005\,cos(3x - 90t)$.
חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

נתון גל סינוס המתקדם במיתר.

א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה-x, בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.

ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.

ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3sec$?

ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?

ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

4) תרגיל – פונקציה ריבועית

נתונה פונקציה $y(x,t)=32x^2+128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03\frac{\text{kg}}{m}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2+128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

תשובות סופיות

1) $9.8\frac{m}{s}$

2) $30\frac{m}{s};\ 0.102\text{N};0.45\frac{m}{s}$

3) א. $a(x,t)=0.00096\pi^2\ sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$ ב. $y(x,t)=0.006_m\ sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$
ג. $x=85_m+50n$, כאשר n מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.
ד. $t=0.001_s-2.5_sn$
ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

4) א. $y(x,t)=(4x+8t)^2+(4x-8t)^2$ ב. $2\frac{m}{s}$ ג. $0.12N$ ד. לא.

החזרה והעברה

רקע

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב-$x = 0$.

רציפות הפונקציה $1.\ \psi_L(0,t) = \psi_R(0,t)$

רציפות הכוח $2.\ F_L = F_R$

אם המתיחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הנגזרת

$$\left.\frac{\partial \psi_L}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_R}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\psi_r(x,t) = r\psi: (-x,t)$$

$$\psi_t(x,t) = t\psi: \left(\frac{v_1}{v_2}x, t\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}\, v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

מקדם החזרה

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}$$

מקדם העברה

$$t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}$$

הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

שאלות

1) תרגיל – ביטול של הגל העובר או החוזר

מיתר מורכב משני חלקים בעלי צפיפויות שונות ρ_1 ו-ρ_2 ומתיחות אחידה T .
גל מהצורה $\Psi_A(x,t) = |A|\,cos(k_1x - \omega t)$ מתקדם בכיוון החיובי ממיתר 1 לכיוון מיתר 2. נתונים: $\rho_2, \rho_1, k_1, T, A, \omega$

א. מצאו את הביטוי עבור הגל המועבר והגל המוחזר באמצעות נתוני השאלה.

ב. נניח עתה, כי בנוסף ל-Ψ_A שולחים גל נוסף ממיתר 2 לכיוון מיתר 1: $\Psi_D(x,t) = |D|\,cos(-k_2'x - \omega' t + \varphi)$. נתון כי $\rho_2 < \rho_1$.
מצאו את $\varphi, \omega', k_2', D$, כך שלאחר המעבר של הגלים בין המיתרים, במיתר 2 יהיה רק גל הנוסע שמאלה. מהם התנאים לכך שבמיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה?

ג. האם ניתן למצוא תנאי, עבורו בו-זמנית במיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה ובמיתר 2 רק גל הנוסע שמאלה? נמקו.

תשובות סופיות

1) א. $\psi_r(x,t) = \frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}|A|\,cos(k_1x + \omega t)$

$$\psi_t(x,t) = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}|A|\,cos(k_2x + \omega t)\,,k_2 = k_1\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

ב. שמאלה: $k_2 = k_1', w = w', \phi = 0$

$$|D| = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}|A|$$

ימינה: $k_2 = k_1', w = w', \phi = \pi$

$$|D| = \frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{\rho_2}}|A|$$

ג. לא, כי הפאזה בכל אחד צריכה להיות שונה.

עכבה

רקע

העכבה, נקראת גם אימפדנס (impedance), מסומנת באות Z, ונוסחתה

$$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{V}$$

T – מתיחות

V – מהירות הגל

$$|Z| = \frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y – הכוח על אלמנט מסה

$V_y(t)$ – מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:

מקדם החזרה $r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$

מקדם העברה $t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$

תאום עכבות: $z_1 = z_2 \Leftarrow t = 1$ ו- $r = 0$

אנרגיה הספק ותנע

רקע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר

$$\varepsilon(x,t)=\rho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2=\rho v^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2$$

אנרגיה ממוצעת בזמן

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho\omega^2|A|^2$$

הספק רגעי בנקודה - כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני כל יחידת זמן

$$P^{\pm}=\pm Z\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2=\pm v\varepsilon(x,t)$$

$P^{\pm}$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי

ההספק הממוצע בזמן

$$\bar{P}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}z\omega^2|A|^2$$

מקדם ההחזרה של האנרגיה

$$R=\frac{P_1^-}{P_1^+}=r^2=\left(\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right)^2$$

מקדם ההעברה של האנרגיה

$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{P}_2^+}{\mathrm{P}_1^+}=\frac{\mathrm{z}_2}{\mathrm{z}_1}\mathrm{t}^2=\frac{4\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2}{(\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2)^2}$$

$$\mathrm{R}+\mathrm{T}=1$$

התנע הוא אפס

שאלות

1) תרגיל - חישובים בפגיעה בתווך

גל סינוס נע ימינה במיתר מסוים בו מהירות הגל היא v_1.
צורת הגל היא $\Psi_i(x,t) = 1.4mm \cdot sin(kx - 200t)$.
הגל מגיע לצומת בו צפיפות המיתר משתנה (המתיחות נשארת קבועה), כך שבחלק הימני מהירות הגל היא $v_2 = 5v_1$.
בהינתן שההספק הממוצע של הגל הפוגע הוא 60 W,

א. מהם האימפדנסים של שני חלקי המיתר?

ב. מהו ההספק הממוצע של הגל העובר והגל החוזר?

ג. מהי האמפליטודה של הגל העובר ושל הגל החוזר?

2) תרגיל - שינוי בהספק כתוצאה משינוי פרמטרים

נתון מיתר מתוח בעל צפיפות מסה $\rho = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{m}$ ומתיחות $T = 50N$.

א. מהו ההספק הממוצע שצריך לספק למיתר, על מנת לייצר גל סינוס בעל תדירות $f = 40\text{Hz}$ ואמפליטודה של $A = 4\text{mm}$?

ב. פי כמה ישתנה ההספק של הגל אם:

1. נכפיל את אורך החבל?
2. נכפיל את האמפליטודה ונקטין את התדירות פי 2?
3. נקפל את החבל לשניים ונשתמש בחבל הכפול כחבל החדש?

3) תרגיל - חישוב אמפליטודה בתיאום עכבות

מיתר בעל צפיפות מסה ρ_1 מחובר למיתר בעל צפיפות מסה ρ_2 באמצעות מיתר נוסף שצפיפות המסה שלו משתנה באופן רציף מ- ρ_1 ל- ρ_2 . במקרה כזה לא תתקיים החזרה אם אורך הגל קטן ביחס לקצב השינוי בצפיפות המסה.
חשבו תחת הנחה זו מה היחס בין האמפליטודה של הגל העובר לגל הפוגע?
הניחו מתיחות אחידה.

תשובות סופיות

1) א. $z_1 = 1531\frac{N \cdot s}{m}, z_2 = 506\frac{N \cdot s}{m}$ ב. $\overline{P}_T = 44.4W, \overline{P}_R = 15.6\text{W}$
ג. $C = 2.1\text{mm}$ $B = 0.71\text{mm}$

2) א. $0.5W$ ב. 1. לא ישתנה. 2. לא ישתנה. 3. יגדל פי $\sqrt{2}$.

3) $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{4}}$

גלים עומדים

רקע

<u>מיתר חצי אינסופי</u>

<u>קצה קשור</u>

$$\Psi(x=0,t)=0 \;\Rightarrow$$
$$\Psi(x,t)=C\sin(kx)\sin(\omega t+\varphi)$$



<u>קצה חופשי</u>

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \;\Rightarrow\; \Psi(x,t)=C\cos(kx)\cos(\omega t+\varphi)$$



<u>מיתר סופי</u>

<u>מיתר סופי עם 2 קצוות קשורים</u>

$$\Psi(x=0,t)=\Psi(x=\mathrm{L},t)=0$$

$$k_n=\frac{\pi n}{L} \qquad n=0,1,2,3\ldots \quad f_n=\frac{vn}{2L}$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

<u>מיתר סופי עם קצה קשור וקצה חופשי</u>

$$\Psi(x=0,t)=0\,,\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{L}}=0$$

$$k_n=\frac{\pi}{L}(\mathrm{n}+\frac{1}{2})\qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{(\mathrm{n}+\frac{1}{2})}$$

$$f_n=\frac{v}{2L}(\mathrm{n}+\frac{1}{2})$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

<u>מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים</u>

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0}=0\,,\qquad\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{L}}=0$$

$$k_n=\frac{\pi n}{L}\qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

$$f_n=\frac{vn}{2L}$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

שאלות

1) תרגיל – גל פוגע וגל חוזר כביטוי של שני גלים עומדים

הראו כי הגל $\Psi(x,t) = A\,cos(\omega t - kx) + rA\,cos(\omega t + kx)$, כאשר r קבוע כלשהו, ניתן לביטוי כסופרפוזיציה של שני גלים עומדים: $\Psi(x,t) =$
$A(1+r)\,cos(\omega t)\,cos(kx) + A(1-r)\,sin(\omega t)\,sin(kx)$

2) תרגיל - מיתר פלדה בפסנתר

מיתר פסנתר מיוצר מפלדה בעלת צפיפות מסה ל**יחידת נפח** $\rho = 4800\frac{\text{kg}}{m^3}$ רדיוס המיתר הוא r, היצרן ממליץ להפעיל את המיתר תחת לחץ (כוח ליחידת שטח חתך) של $1.3 \cdot 10^9\,\frac{N}{m^2}$.

א. הראו שמהירות הגלים במיתר אינה תלויה ברדיוס שלו, וחשבו אותה.

ב. מה צריך להיות אורך המיתר כדי שישמיע את הצליל 'לה', שתדירותו 440Hz ? כמנגנים במיתר בד"כ שומעים את התדירות הבסיסית.

ג. מגדילים את המתיחות פי α ללא שינוי באורך המיתר, מה צריכה להיות α כדי להעלות את תדירות המיתר פי 1.2?

תשובות סופיות

1) הוכחה בסרטון.

2) א. $520\,\frac{m}{s}$ ב. 59cm ג. 1.44