

מבוא לגלים

פרק 5 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים.....1

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, כאשר

T – המתוחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega = v \cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = \\ &= B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t = \\ &= C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים (העשרה בלבד)

$$\psi(x, t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3 = A_1^*$ ו- $A_4 = A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$$

שאלות

**1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד**

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$. נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2\text{m}$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות). חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, במיתר מעורר גל מהצורה:
 $\psi(x, t) = 0.005 \cos(3x - 90t)$.
 חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

נתון גל סינוס המתקדם במיתר.
 א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה- x , בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.
 ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.
 ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3\text{sec}$?
 ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?
 ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

**4 תרגיל – פונקציה ריבועית**

נתונה פונקציה $y(x, t) = 32x^2 + 128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

5 תרגיל – מיתר בתווך צמיג *

מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתווך צמיג, כך שכוח החיכוך

שפועל על אלמנט אורך dx , הוא $F = -b dx \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ כאשר b פרמטר נתון.

א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).

ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.

הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x, t) = X(x)f(t)$ זהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?

ג. נתון שבזמן $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x, t = 0) = a \cos(k_0 x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t > 0$.

תשובות סופיות

$$9.8 \frac{m}{s} \quad (1)$$

$$30 \frac{m}{s}; 0.102N; 0.45 \frac{m}{s} \quad (2)$$

$$a(x, t) = 0.00096\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right) \quad \text{ב.} \quad y(x, t) = 0.006_m \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right) \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג. כאשר $x = 85_m + 50n$, מינוס אינסוף לאינסוף.

$$t = 0.001_s - 2.5_n \quad \text{ד.}$$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

$$y(x, t) = (4x + 8t)^2 + (4x - 8t)^2 \quad \text{א.} \quad (4) \quad \text{ב.} \quad 2 \frac{m}{s} \quad \text{ג.} \quad 0.12N \quad \text{ד.} \quad \text{לא.}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{b}{T} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\Gamma = \frac{b}{\rho} \quad \text{כאשר} \quad \psi(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] e^{-\frac{\Gamma}{2}t} [\cos(\omega t) \quad 2C \sin(\omega t)] \quad \text{ב.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_0^2 T}{\rho} - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad \text{כאשר} \quad \psi(x, t) = a \cos(k_0 x) e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[\cos(\omega t) \frac{\Gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right] \quad \text{ג.}$$