

# אופטיקה וגלים

פרק 5 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים.....1

## גלים רוחביים במיתר

### משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ , כאשר

$T$  – המתוח במיתר

$\rho$  – צפיפות המסה ליחידת אורך

$\psi$  – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא  $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ .

פתרון המשוואה:

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$$

יחס הדיספרסיה:  $\omega = v \cdot k$ .

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = \\ &B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t = \\ &C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

### פתרון במספרים מרוכבים (העשרה בלבד)

$$\psi(x, t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז  $A_3 = A_1^*$  ו-  $A_4 = A_2^*$ , והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$$

## שאלות

**1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד**

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה ( $g$ ) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה  $M = 2\text{kg}$ . נתון שלחבל יש מסה של  $m = 5\text{gr}$  (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של  $l = 1.2\text{m}$ . הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא  $t = 17.5\text{ms}$  (מילי שניות). חשבו את  $g$  (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

**2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר**

צפיפות המסה הקווית במיתר היא  $1.2 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ , במיתר מעורר גל מהצורה:  
 $\psi(x, t) = 0.005 \cos(3x - 90t)$ .  
 חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

**3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר**

- נתון גל סינוס המתקדם במיתר.
- כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.
  - רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.
  - איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן  $t = 3\text{sec}$ ?
  - עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה  $x = 2\text{cm}$  היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?
  - מקטינים את התדירות  $f$  של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

**(4) תרגיל – פונקציה ריבועית**

נתונה פונקציה  $y(x, t) = 32x^2 + 128t^2$ . הניחו יחידות סטנדרטיות.

- א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר. הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.
- ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.
- ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא  $0.03 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$  חשבו את מתיחותו.
- ד. האם הפונקציה  $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$  היא גם פתרון של משוואת הגלים?

**(5) תרגיל – מיתר בתווך צמיג \***

- מיתר בעל מתיחות  $T$  וצפיפות  $\rho$  נמצא בתוך תווך צמיג, כך שכוח החיכוך שפועל על אלמנט אורך  $dx$ , הוא  $F = -b dx \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ , כאשר  $b$  פרמטר נתון.
- א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).
  - ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה  $x$  תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש. הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים  $\Psi(x, t) = X(x)f(t)$  זהו כי המשוואה עבור  $f(t)$  היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו  $\Gamma$  במקרה הזה?
  - ג. נתון שבזמן  $t = 0$  צורת המיתר היא  $\Psi(x, t = 0) = a \cos(k_0 x)$  ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן  $t > 0$ .

## תשובות סופיות

(1)  $9.8 \frac{m}{s}$

(2)  $30 \frac{m}{s}; 0.102N; 0.45 \frac{m}{s}$

(3) א.  $y(x, t) = 0.006_m \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right)$  ב.  $a(x, t) = 0.00096\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right)$

ג. כאשר  $x = 85_m + 50n$ ,  $n$  מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.

ד.  $t = 0.001_s - 2.5_s n$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

(4) א.  $y(x, t) = (4x + 8t)^2 + (4x - 8t)^2$  ב.  $0.12N$  ג.  $2 \frac{m}{s}$  ד. לא.

(5) א.  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{b}{T} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

ב.  $\Gamma = \frac{b}{\rho}$  כאשר  $\psi(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] e^{-\frac{\Gamma}{2}t} [\cos(\omega t) 2C \sin(\omega t)]$

ג.  $\omega = \sqrt{\frac{k_0^2 T}{\rho} - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$  כאשר  $\psi(x, t) = a \cos(k_0 x) e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[ \cos(\omega t) \frac{\Gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right]$