

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 18 - גלים דו מימדיים ומנחה גלים

תוכן העניינים

1. גלים דו מימדיים 1
2. מנחה גלים 4

גלים דו מימדיים

רקע

משוואת הגלים:

$$\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T - מתיחות ליחידת אורך.
 ρ - צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון:

$$z(x, y, t) = A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

$$\vec{k} = (k_x, k_y)$$

כיוון וקטור הגל \vec{k} הוא כיוון התקדמות הגל וחזיתות הגל הן במאונך אליו.

אורך הגל:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

יחס הנפיצה:

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} (k_x^2 + k_y^2) = v^2 \cdot |\vec{k}|^2$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה:

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L_y} y\right) \cos(\omega_{m,n} t + \varphi_{m,n})$$

שאלות

(1) תנאי התחלה משולשים בתוף ריבועי

נתון תוף ריבועי כד ש: $0 \leq x, y \leq L$. התוף קשור בקצוותיו ובעל מתיחות ליחי אורך T וצפיפות ρ . מותחים את מרכז התוף במרכזו ומשחררים ממנוחה כד שבזמן: $t = 0$ נוצרת בו הצורה:

$$z(x, y, 0) = Af(x)f(y)$$

$$f(q) = \begin{cases} q & , 0 \leq q \leq \frac{L}{2} \\ L - q & , \frac{L}{2} \leq q \leq L \end{cases}$$

- א. מצאו את מקדמי הפרישה ורשמו את הצורה הכללית של פונקציית הגל.
- ב. מצאו את פונקציית הגל אם ראשית הצירים הייתה במרכז התוף ולא בפינה רמו: אין צורך לפתור מחדש.
- ג. נניח כי כל מקדם פרישה הקטן מ- $\frac{A_{11}}{100}$ הוא זניח. כמה מקדמי פרישה משמעותיים קיימים (ללא מקדמים המאפסים את הפונקציה).

(2) תוף ריבועי לא איזוטרופי

- נתון תוף ריבועי בגודל $L_x L_y$, התפוס בקצותיו. התוף אינו איזוטרופי, המתיחות בציר x היא T_x והמתיחות בציר y היא T_y .
- א. רשמו את משוואת הגלים עבור התוף.
 - ב. מהו יחס הנפיצה?
 - ג. מהם אופני התנודה?

תשובות סופיות

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} y\right) \cos(w_{m,n} t) \quad \text{א. (1)}$$

$$A_{m,n} = \frac{16L^2}{\pi^2 m^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$w_{m,n} = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} (n^2 + m^2)$$

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} \left(y + \frac{L}{2}\right)\right) \cos(w_{m,n} t) \quad \text{ב.}$$

ג. 10

$$\frac{T_x}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{T_y}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{א. (2)}$$

$$w^2 = \frac{T_x}{\rho} k_x^2 + \frac{T_y}{\rho} k_y^2 \quad \text{ב.}$$

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L_y} y\right) \cos(w_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \quad \text{ג.}$$

מנחה גלים

רקע

הפתרון עבור רצועה מלבנית ארוכה ברוחב L עם התאפסות הפונקציה בשפה:

$$z(x, y, t) = A \sin\left(\frac{\pi n}{L} y\right) e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_x}$$

$$v_g = \frac{k_x v^2}{\omega}$$

$$v_g \cdot v_\varphi = v^2$$

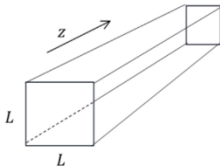
חסם תחתון:

$$\omega > \frac{\pi n}{L}$$

שאלות

1) מוליך גלים תלת מימדי

נסתכל על מוליך גלים תלת מימדי הבנוי מתיבה מאוד ארוכה בעלת שטח חתך ריבועי עם צלע L . שטח החתך הוא במישור xy והמוליך הוא לאורך ציר z . משוואת הגלים במקרה התלת מימדי היא:



$$v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

הניחו שבשפות התיבה פונקציית הגל מתאפסת.

- מצאו פתרון כללי למשוואה, $\psi(x, y, z, t)$ הניחו כי גל המתקדם בכיוון z החיובי.
- הציבו את תנאי השפה ומצאו את אופני התנודה האפשריים ויחס הנפיצה.
- מהי תדירות הקטעון (תדירות החסם התחתון הנמוך ביותר)?
- כיצד ישתנו תשובותיכם לסעיף ב' אם התנאי בשפת התיבה היה שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת ולא הפונקציה עצמה?

תשובות סופיות

$$\psi(x, y, z, t) = (Ae^{ik_x x} + Be^{-ik_x x})(Ce^{ik_y y} + Dc^{-ik_y y})e^{i(k_z z - \omega t)} \quad \text{א. (1)}$$

$$\psi_{m,n}(x, y, z, t) = A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad \text{ב.}$$

$$\omega^2 = v^2 \left(\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + k_z^2 \right)$$

$$\omega_{m,n} = \frac{v\pi}{L} \sqrt{2} \quad \text{ג.}$$

$$\psi_{m,n}(x, y, z, t) = A_{m,n} \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad \text{ד.}$$