גלים ואופטיקה 7321410

פרק 8 - גלים דו מימדיים ומנחה גלים

תוכן העניינים

1. גלים דו מימדיים 1
2. מנחה גלים 4

גלים דו מימדיים

רקע

משוואת הגלים:

$$\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T - מתיחות ליחידת אורך.
ρ - צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון:

$$z(x,y,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_x x+k_y y-\omega t\right)}$$
$$\vec{k}=\left(k_x,k_y\right)$$

כיוון וקטור הגל $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל וחזיתות הגל הן במאונך אליו.

אורך הגל:

$$\lambda=\frac{2\pi}{\left|\vec{k}\right|}$$

יחס הנפיצה:

$$\omega^2=\frac{T}{\rho}\left(k_x^2+k_y^2\right)=v^2\cdot\left|\vec{k}\right|^2$$

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה:

$$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos\left(\omega_{m,n}t+\varphi_{m,n}\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) תנאי התחלה משולשים בתוך ריבועי

נתון תוך ריבועי כך ש: $0 \le x,y \le L$. התוך קשור בקצוותיו ובעל מתיחות ליח' אורך T וצפיפות ρ. מותחים את מרכז התוך במרכזו ומשחררים ממנוחה כך שבזמן: $t=0$ נוצרת בו הצורה:

$$z(x,y,0) = Af(x)f(y)$$

$$f(q) = \begin{cases} q & ,\ 0 \le q \le \frac{L}{2} \\ L-q & ,\ \frac{L}{2} \le q \le L \end{cases}$$

א. מצאו את מקדמי הפרישה ורשמו את הצורה הכללית של פונקציית הגל.

ב. מצאו את פונקציית הגל אם ראשית הצירים הייתה במרכז התוך ולא בפינה רמז: אין צורך לפתור מחדש.

ג. נניח כי כל מקדם פרישה הקטן מ- $\frac{A_{11}}{100}$ הוא זניח. כמה מקדמי פרישה משמעותיים קיימים (ללא מקדמים המאפסים את הפונקציה).

2) תוך ריבועי לא איזוטרופי

נתון תוך ריבועי בגודל L_xL_y, התפוס בקצוותיו. התוך אינו איזוטרופי, המתיחות בציר x היא T_x והמתיחות בציר y היא T_y.

א. רשמו את משוואת הגלים עבור התוך.

ב. מהו יחס הנפיצה?

ג. מהם אופני התנודה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) א. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$$

$$A_{m,n}=\frac{16L^2}{\pi^2m^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$w_{m,n}=\frac{T}{\rho}\cdot\frac{\pi^2}{L^2}\left(n^2+m^2\right)$$

ב. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\left(x+\frac{L}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}\left(y+\frac{L}{2}\right)\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$$

ג. 10

2) א. $$\frac{T_x}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{T_y}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ב. $$w^2=\frac{T_x}{\rho}k_x^2+\frac{T_y}{\rho}k_y^2$$

ג. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos\left(w_{m,n}t+\varphi_{m,n}\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

מנחה גלים

רקע

הפתרון עבור רצועה מלבנית ארוכה ברוחב L עם התאפסות הפונקציה בשפה:

$$z(x,y,t) = A\sin\left(\frac{\pi n}{L}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x-\omega t)}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_x}$$

$$v_g = \frac{k_x v^2}{\omega}$$

$$v_g \cdot v_\varphi = v^2$$

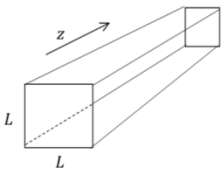
חסם תחתון:

$$\omega > \frac{\pi n}{L}$$

שאלות

1) מוליך גלים תלת מימדי

נסתכל על מוליך גלים תלת מימדי הבנוי מתיבה מאוד ארוכה בעלת שטח חתך ריבועי עם צלע L. שטח החתך הוא במישור xy והמוליך הוא לאורך ציר z.
משוואת הגלים במקרה התלת מימדי היא:



$$v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

הניחו שבשפות התיבה פונקציית הגל מתאפסת.

א. מצאו פתרון כללי למשוואה, $\psi(x,y,z,t)$ הניחו כי גל המתקדם בכיוון z החיובי.

ב. הציבו את תנאי השפה ומצאו את אופני התנודה האפשריים ויחס הנפיצה.

ג. מהי תדירות הקטעון (תדירות החסם התחתון הנמוך ביותר)?

ד. כיצד ישתנו תשובותיכם לסעיף ב' אם התנאי בשפת התיבה היה שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת ולא הפונקציה עצמה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) א. $\psi\left(x,y,z,t\right)=\left(Ae^{ik_x x}+Be^{-ik_x x}\right)\left(Ce^{ik_y y}+Dc^{-ik_y y}\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

ב. $\psi_{m,n}\left(x,y,z,t\right)=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

$$w^2=v^2\left(\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2+k_z^2\right)$$

ג. $w_{m,n}=\frac{v\pi}{L}\sqrt{2}$

ד. $\psi_{m,n}\left(x,y,z,t\right)=A_{m,n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©