

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 26 - גלים אלקטרומגנטיים

תוכן העניינים

1. הסברים ותרגילים.....1

הסברים ותרגילים:

רקע:

ממשוואות מקסוול למשוואות הגלים בריק ($\rho = J = 0$):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \text{ - מהירות האור}$$

המשוואה מתקיימת עבור כל רכיב בנפרד:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \begin{aligned} \vec{\nabla}^2 E_x &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_x}{dt^2} \\ \vec{\nabla}^2 E_y &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_y}{dt^2} \\ \vec{\nabla}^2 E_z &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_z}{dt^2} \end{aligned}$$

תזכורת ללאפליסיאן:

$$\vec{\nabla}^2 E_i = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}$$

פתרון המשוואה עבור רכיב כלשהו של $\vec{E}$ או של $\vec{B}$:

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ - וקטור הגל, כיוונו הוא כיוון התקדמות הגל

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

ω - התדירות הזוויתית

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f - התדירות בהרץ

T - זמן המחזור

הקוסינוס בפתרון זהה לכל הרכיבים של השדה החשמלי והמגנטי, ההבדל בין הרכיבים הוא רק במקדם A_i

איך למצא שדה מגנטי מחשמלי ולהפך :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{E} = c \vec{B} \times \hat{k}$$

צורת הגל במרחב :



λ - אורך הגל, המרחק בין שיא לשיא:

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

יחס הדיספרסיה :

$$\omega = c|k|$$

היחס מתקבל מהצבה של הפתרון במשוואת הגלים

השדה החשמלי תמיד מאונך לשדה המגנטי ושניהם תמיד מאונכים לכיוון התקדמות הגל.

פתרון נוסף :

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$$

במקרה הזה הגל מתקדם בכיוון הפוך ל $-\vec{k}$

שאלות:

(1) תרגיל 1

נתון השדה המגנטי: $\vec{B} = B_0 \cos(Ax - 2Ay - \omega t) \hat{z}$.

א. מצא את וקטור הגל של השדה?

ב. הבא את התדירות באמצעות הפרמטר A .

ג. מצא את השדה החשמלי?

ד. מה הכוח הפועל על מטען Q הנמצא בראשית עם מהירות $\vec{v} = v_0 \hat{x}$

ב- $t = 0$?

ה. מצא את הוקטור פויטינג?

(2) מצא שדה מגנטי

השדה החשמלי בגל אלקטרו מגנטי נתון לפי: $\vec{E} = E_0 (1, 1, 2) e^{i(2x - z - \omega t)}$.

מצא את השדה המגנטי.

(3) גל עומד

משוואת הגלים בצורה כללית היא: $\nabla^2 \phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ כאשר ϕ היא פונקציית הגל

במרחב ו- v היא מהירות הגל $\left(v = \frac{\omega}{k}\right)$. במקרה של גלים אלקטרו מגנטיים ϕ

תהיה הפונקציה של השדה החשמלי או המגנטי, $v = c$.

א. הראה שהפונקציה $\phi(x, t) = A \cos(kx) \sin(\omega t)$ מקיימת את משוואת

הגלים ולכן היא פתרון אפשרי למשוואה.

ב. פתרון דלמבר למשוואת הגלים אומר שכל פתרון צריך להיות

מהצורה $f(x - vt) + g(x + vt)$, כאשר f ו- g הם פונקציות כלשהן.

הראה שהפונקציה מסעיף א' היא גם פיתרון מהצורה הכללית של

הפתרון של דלמבר.

רמז: השתמש בזהויות טריגונומטריות.

(4) תרגיל 4

השדה החשמלי של גל אלקטרו מגנטי המתפשט בריק בכיוון x נתון לפי:

$$\vec{E} = E_0 e^{-\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2} \hat{y} + E_0 e^{-\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2} \hat{z}$$

כאשר E_0 ו- a הם קבועים חיוביים.

א. מהו השדה המגנטי של הגל?

ב. הראו כי השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי.

ג. כתבו ביטוי לצפיפות האנרגיה של הגל.

תשובות סופיות:

$$\omega = C \cdot A \cdot \sqrt{S} \quad \text{ב.} \quad \vec{k} = (A, -2A, 0) \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\vec{E} = +C^2 2AB_0 \cos(Ax - 2Ay - \omega t) \cdot \frac{1}{+\omega} \hat{x} + C^2 2AB_0 \cos(Ax - 2Ay - \omega t) \cdot \frac{1}{+\omega} \hat{y} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{S} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{ה.} \quad \vec{F} = Q \left(\frac{C^2 AB_0}{\omega} (2\hat{x} + \hat{y}) + V_0 B_0 (-\hat{y}) \right) \quad \text{ד.}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\sqrt{5}c} (1, -5, 2) e^{i(2x - z - \omega t)} \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$2\varepsilon_0 E_0^2 e^{-2\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2} \quad \text{ג.} \quad \frac{E_0}{c} e^{-\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2} (\hat{z} - \hat{y}) \quad \text{א.} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (4)$$