תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 6 - גלים אורכיים-גלי קול

תוכן העניינים

1. גלי קול בצינור 1
2. אפקט דופלר 8

גלי קול בצינור

רקע

גל אורכי - תנועת המולקולות היא בכיוון ההתקדמות של הגל

$\psi(x,t)$ -פונקציית ההעתק של מולקולות הגז משיווי משקל. x מציין את מיקום המולוקולות בשיווי מישקל ולא את המיקום שלהן כתלות בזמן.

$\psi_p(x,t)$ -פונקציית הלחץ העודף access pressure

$\Delta\rho(x,t)$ -פונקציית השינוי בצפיפות

נקודת צומת בפונקציית ההעתק היא נקודת טבור בפונקציות הצפיפות והלחץ ולהפך

נוסחה מתרמו לקשר בין לחץ ונפח עבור גז אידיאלי בתהליך אדיאבטי:

$$PV^{\gamma} = const$$

הקשר בין פונקציית ההעתק לפונקציית הלחץ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma P_0}\psi_p$$

P_0 - הלחץ בשיווי משקל

γ - קבוע הקשור לסוג הגז מתוך משוואת הגז בתהליך אדיאבטי

מקדם האלסטיות של הגז

מקדם האלסטיות של הגז

$$B_a = \gamma P_0$$

משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

מהירות הגלים - מהירות הקול (לפעמים גם כתובה באות c):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

באוויר בתנאים סטנדרטיים: $v \approx 340\,{}^{m}/_{s}$

אותה המשוואה מתקיימת גם עבור ψ_p ו- $\Delta\rho$

הקשר בין הצפיפות לפונקציית ההעתק:

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

עכבה של גל קול מישורי ליחידת שטח:

$$\frac{Z}{A} = \rho_0 v$$

ρ_0 - צפיפות המסה בשיווי משקל

A - שטח החתך של הצינור

v - מהירות הקול בחומר

האנרגיה הכוללת ליחידת אורך:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}A\rho_0\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] = A\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

השוויון האחרון הוא עבור גלים נעים בלבד

אנרגיה פוטנציאלית וקינטית ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{U}_{dx} = \bar{E}_{k_{dx}} = \frac{1}{4}\rho_0 A\omega^2\psi_{max}^2$$

אנרגיה כוללת ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho_0 A\omega^2\psi_{max}^2$$

ψ_{max} - האמפליטודה של פונקציית ההעתק - קבוע

ω - התדירות הזוויתית

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

הספק של גל קול נע (כמה אנרגיה עוברת דרך שטח חתך ביחידת זמן):

$$P(x,t) = \pm v\varepsilon(x,t)$$

כאשר הפלוס/מינוס הם עבור גל שנע בכיוון החיובי/שלילי בהתאמה

(לא לבלבל עם P של לחץ)

עוצמה של הגל (ההספק ליחידת שטח):

$$I(x,t) = \frac{|P(x,t)|}{A} = v\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}v\rho_0\omega^2\psi_{max}^2$$

מדידת עוצמה בסולם לוגריתמי:

$$I_a = I_0 \cdot 10^a$$

a - היא העוצמה ב B (בל)

$$I_0 = 10^{-12}\frac{w}{m^2}$$

$1B = 10\,dB$ (dB זה דציבל)

עוצמה בגל כדורי:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

תנאי שפה בצינור:

- קצה סגור $\psi = 0$ (כמו קצה קשור במיתר)
- קצה פתוח $\psi_P = 0 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ (כמו קצה חופשי במיתר)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) **שעון מעורר בחלל**
אסטרונאוט הנמצא במעבורת חלל יצא מהמעברות לבצע תיקון חיצוני.
האסטרונאוט לקח איתו שעון מעורר וכיוון אותו לצלצל בשעה שבע בערב כך שיספיק לחזור לארוחת הערב בתוך המעבורת. האסטרונאוט הניח את השעון לידו בזמן שהוא מבצע את התיקון. האם האסטרונאוט ישמע את השעון מצלצל?
רמז: בחלל אין אוויר.

2) **מצאו פונקציית גל מנתונים על צפיפות**
גל קול הרמוני נע בכיוון החיובי. האמפליטודה של השינוי בצפיפות האוויר של הגל היא $A_{\Delta\rho} = 24 \cdot 10^{-3}\,{}^{kg}/_{m^3}$. התדירות של הגל היא $500Hz$. נתון גם כי $\Delta\rho(0,0) = 0$, $\rho_0 = 1.2\,{}^{kg}/_{m^3}$ ו- $v = 340\,{}^{m}/_{s}$. מצאו מהי ההסטה משיווי משקל של מולקולות האוויר הנמצאות ב $x = 15cm$ בזמן $t = 0$.

3) **כמה אנרגיה עברה בשעה**
העוצמה של גל קול מישורי היא $I = 1.4\mu\, W/c\, m^2$. חיישן בעל שטח חתך $A = 3.6cm^2$ קולט את הגל. כמה אנרגיה קיבל החיישן כל שעה?

4) **פי כמה גדלה העוצמה עבור שינוי של דציבל אחד**
ראינו כי גידול של העוצמה ב 1B הוא גידול של פי 10 ביחידות של ${}^{W}/_{m^2}$. חשבו פי כמה גדלה העוצמה ביחידות של ${}^{W}/_{m^2}$ עבור גידול של 1dB.

5) **חישוב הפרעה בלחץ מעוצמה ממוצעת**
נתון גל קול מישורי בתדירות $12kHz$. העוצמה הממוצעת בזמן של הגל היא $\bar{I} = 2.5 \cdot 10^{-4}\, W/m^2$. הגל מתקדם בתווך בעל:
$$P_0 = 0.7 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m^2}\,,\ \gamma = 1.48\,,\ v = 340\mathrm{m/\,sec}$$
מצאו ביטוי לשינוי בלחץ כתלות במיקום ובזמן אם ידוע שהגל הוא גל סינוס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

6) חישוב ירידה של העוצמה

מקור מייצר גל קול כדורי. חיישן בעל שטח חתך של $0.2m^2$ ממוקם במרחק $r_1 =$ $0.8m$ מהמקור ומודד הספק של $P = 3mW$.

א. מהי העוצמה של הגל במרחק r_1 ?

ב. מהו ההספק של המקור?

ג. מה העוצמה של הגל במרחק $r_2 = 1.2m$?

ד. מה ההספק שימדוד החיישון במרחק r_2 ?

7) חליל בצליל לה

מה צריך להיות אורכו של חליל על מנת שהתנודה הבסיסית שלו תהיה הצליל לה -תדר 440Hz ? הניחו שמהירות הקול היא $340\,m/s$ ושניתן להתייחס לחליל כצינור הפתוח בשני קצוותיו.

8) כמה תדירויות נמצאות בתחום השמיעה

צינור באורך של $1m$ מרעיש כאשר הרוח נושבת . מהירות הקול היא $340\,m/s$

א. אם הצינור פתוח בשני קצוותיו , כמה מתוך ההרמוניות שלו נמצאות בתחום השמיעה ? $(20Hz - 20kHz)$

ב. ציירו את החלק המרחבי של ψ_p עבור שלושת ההרמוניות הראשונות במקרה שבו הצינור פתוח רק בצד אחד.

9) רזולוציית מדידה של עטלף

עטלפים משתמשים בגלי קול בשביל למפות את המרחב (בדומה ל"סונר"). נניח כי עטלף שולח גלי קול אל חפץ מסוים ומודד את מיקומו ביחס אליו על ידי מדידת הזמן שלוקח לגלי הקול לחזור אליו מהחפץ.

א. בהנחה שהעטלף והחפץ עומדים במקומם, מה צריכה להיות רזולוציית המדידה של העטלף, כלומר מהו הזמן הכי קצר שהוא צריך למדוד, על מנת לזהות חפץ הנמצא במרחק 40cm ממנו?



ב. בהנחה שגודל החפץ הכי קטן שהעטלף מסוגל לזהות הוא בסדר גודל של אורך הגל שהעטלף מייצר, מה יהיה התדר אותו צריך העטלף לייצר על מנת לזהות חפץ בגודל של 1cm ? הניחו כי מהירות הקול היא $340\,m/s$



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

10) ערכי RMS

ערך RMS של פונקציה מחזורית בזמן בעלת זמן מחזור T מוגדר כ -

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

ההפרעה בלחץ בגל קול מישורי נתונה ביחידות פסקל לפי :

$$\psi_P(x,t) = 6 \cdot 10^{-6}\cos(kx - \omega t)$$

נתון גם ש :

$$P_0 = 0.8 \cdot 10^4\ N/m^2\ ,\gamma = 1.4\ ,v = 340m/\sec\ \ ,\omega = 7000rad/\sec$$

א. מהו אורך הגל?

ב. מהו ערך ה RMS של התנודות בלחץ?

ג. מהו ערך ה RMS של המהירות החומרית בגל?

ד. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$?

ה. מהו ההספק הממוצע בזמן הנקלט בגלאי בעל שטח של $0.15m^2$ המאונך לכיוון התקדמות הגל?

11) גל קול כדורי וערכי RMS

מקור מייצר גל קול כדורי הרמוני בתדר $500Hz$. ערך ה RMS של הלחץ במרחק $r_1 = 30cm$ הוא $4\ N/m^2$. נתון גם ש : $P_0 = 10^5\ N/m^2\ ,\gamma = 1.5\ ,v = 330m/\sec$

א. מהו ערך ה RMS של הלחץ במרחק $r_2 = 15m$?

ב. מהו ערך ה RMS של פונקציית ההעתק באותו המיקום ?

ג. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$ באותו מיקום?

12) מוט ברזל מוחזק באמצע

נתון מוט ברזל באורך $L = 80cm$ ס"מ. מהירות הקול בברזל היא בערך $4910\ m/s$. מחזיקים את המוט במרכזו ונותנים לו מכה בנקודה הנמצאת באמצע בין נקודת האחיזה לקצה.

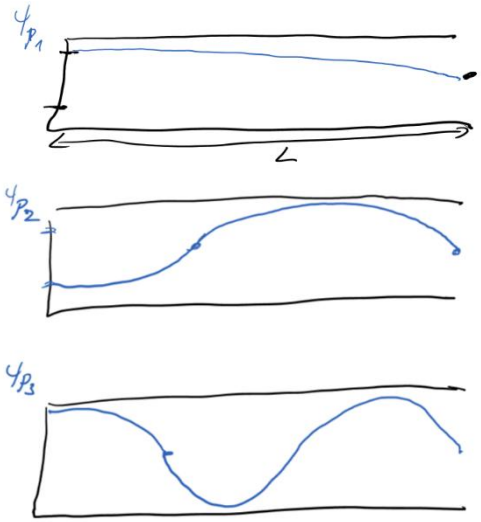
א. ציירו את הגל של תדירות הייסוד ושל ההרמוניה הראשונה וחשבו את התדירויות האלו.

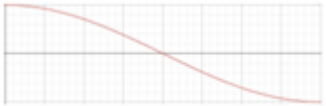
ב. חזרו על סעיף א אם נקודת האחיזה הייתה במרחק $\frac{1}{4}L$ מהקצה.

ג. היכן יש להחזיק את המוט בשביל להשמיע את שני הרזוננסים הבאים?

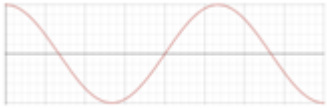
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

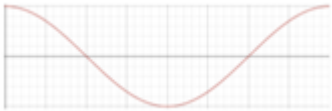
1) לא
2) 0.3mm
3) 18,144J
4) פי 1.26
5) $\psi_p(x,t) = 0.123\, sin(222x - 75.4 \times 10^3\, t)$
6) א. 15×10^{-3} W/m²t ב. 0.121 W ג. 6.67×10^{-3} W/m² ד. 1.33 mW
7) 0.39m
8) א. 117 ב.

9) א. 2.35mm ב. 34KHz
10) א. 0.31 m
ב. 4.24×10^{-6} Pa
ג. 1.29×10^{-7} m/s
ד. 1.6×10^{-15} J/m²
ה. 8.18×10^{-14} W
11) א. 0.08 N/m²
ב. 5.6×10^{-8} m
ג. 4.3×10^{-8} J/m
12) א. $f_1 = 3069Hz$



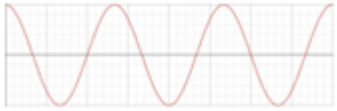
$f_2 = 9206Hz$



ב. $f_1 = 6138Hz$



$f_2 = 18{,}413Hz$



ג. עבור x=10cm ,n=4 ועבור x=8cm , n=5

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

אפקט דופלר

רקע

עבור מקור נע וצופה נייח:

$$f' = f_s \frac{1}{1-\frac{v_s}{v}}$$

f' - התדר המוסט.

v_s - מהירות המקור, חיובית עם כיוון התקדמות הגל.

f_s - תדירות המקור (התדירות שהצופה היה קולט אם המקור לא היה זז).

v - מהירות הגל.

עבור מקור וצופה נעים:

$$f_0 = f_s \frac{v+v_0}{v-v_s}$$

f_0 - התדר המוסט (התדר שקולט צופה שנע).

v_0 - מהירות הצופה, חיובית נגד כיוון התקדמות הגל.

גלי הלם:

$$\sin\theta = \frac{v}{v_s}$$

θ - חצי מזווית הראש של קונוס גל ההלם.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) מציאת המהירות של גוף בתנועה הרמונית

גוף קטן בעל מסה m נע בתנועה הרמונית. הגוף משדר גל קול באופן רציף.
מודדים את התדירות המינימלית והמקסימלית של גלי הקול הנקלטים מהגוף.
חשבו את האנרגיה הקינטית של הגוף באמצעות התדירויות.
הניחו שהבעיה חד מימדית.

2) מקור נע בתאוצה*

מקור נע במהירות v_s לכיוון צופה נייח הנמצא במרחק L ופולט גלי קול בתדירות f_s (תדירות המקור). המקור מתחיל להאיץ בתאוצה קבועה a.
מהי התדירות אותה ימדוד הצופה כתלות בזמן? ניתן להניח כי: $aT << v_s$ וכי הצופה תמיד רחוק מהמקור. שימו לב כי לגל לוקח זמן להגיע לצופה.

3) נמלה מטיילת על מיתר

במיתר אינסופי קיימת הפרעה מהצורה: $\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$
כאשר אורך הגל ומהירות הגל הן: $\lambda=0.4\mathrm{m}$, $v=\frac{7\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

נמלה מטיילת על המיתר במהירות $0.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ בכיוון הפוך לכיוון התקדמות הגל.
כמה פעמים עולה ויורדת הנמלה כל שניה?

4) מדידת מהירות של צוללת

צוללת נעה במהירות: $v_1=\frac{19\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ מזהה צוללת נוספת הנעה לכיוונה.
בצוללת יש סונר המייצר גלי קול בתדר קבוע: $f=1000\mathrm{Hz}$.
גלי הקול פוגעים בצוללת השנייה וחוזרים לסונר. התדר של הגל המוחזר שמודד הסונר הוא: $f'=1060\mathrm{Hz}$.

ידוע שמהירות הגלים במי ים היא: $v=1519\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.
חשבו את מהירות הצוללת השנייה (ביחס לקרקע).



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

5) פעימות של גל המוחזר מפגיעה בקיר

אדם העומד הרחק מקיר מחזיק מקור שפולט צלילים בתדירות 280Hz.

האדם מתחיל לנוע לכיוון הקיר, עם המקור בידיו, במהירות $3\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

הניחו שמהירות הקול היא: $330\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מה תדירות הצליל אותה היה שומע מאזין הנמצא ליד הקיר במנוחה?

ב. אילו האדם שנע היה יכול להאזין רק לגל המוחזר מהקיר,
מה תדירות הצליל שהוא היה שומע?

ג. נניח שעוצמת הגל המוחזר מהקיר זהה לזו של הגל הפוגע.
מה התדר ששומע האדם שנע ומהי תדירות הפעימות של גל זה?

תשובות סופיות

1) $E_k=\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{f_{\max}-f_{\min}}{f_{\max}+f_{\min}}\right)^2$

2) $f_s=\frac{1}{1-\frac{v_s+a\left(t-\frac{L}{v}\right)}{v}}$

3) 18

4) $34.8\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

5) א. 283Hz ב. 285Hz

ג. תדירות הגל היא: 283Hz ותדירות הפעימות היא: 2.6Hz.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©