

קורס קדם במתמטיקה למהנדסים

פרק 12 - גיאומטריה אנליטית - מקומות גיאומטרים והוכחות

תוכן העניינים

1. מקומות גיאומטרים.....1
2. שאלות הוכחה.....5

מקומות גיאומטריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

מקום גאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.

מקום גאומטרי הוא משוואה המקשרת בין x ל- y .

טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:

בשאלות של מקום גאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

• שיפועים:

i. שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).

ii. שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא -1).

iii. שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.

• משפט פיתגורס.

• אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.

• משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.

• קטע מרכזים:

i. במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים.

ii. במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.

• משפטים מגאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)

• אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה.

שאלות:

- (1) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-7, -6)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(9, 2)$.
- (2) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(3, -6)$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $B(-1, 10)$.
- (3) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(1, 0)$ קטן פי 3 ממרחקן מהישר $x = 9$.
- (4) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה $(6, 0)$ ומשיקים לישר $x = -6$.
- (5) נתונים שני ישרים: I. $3x + y - 6 = 0$, II. $2x + 6y - 1 = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II.
- (6) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- y מימין ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?
- (7) מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה $(4, -10)$ עם נקודות על הישר $y = 6x + 2$.
- (8) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.
- (9) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 36$. הכפילו את שיעורי ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$. מצא את המקום הגאומטרי שמתקבל באופן הזה.

10 נתונות הנקודות $A(2,0)$ ו- $B(10,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים ABC אם ידוע שהקודקוד C מונח על הישר $y = 3x - 12$. מהי ההגבלה?

11 נתון המעגל $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה $(7,2)$.

12 מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ בזווית של 120° .

13 מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בזווית של 60° .

14 נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $x^2 + y^2 - 12x - 64 = 0$. מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C. בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה- x . המקביל ל-AM והמקביל לציר ה- x נפגשים בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודה D. מהן ההגבלות?

15 האליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ חותכת את חלקו החיובי של ציר ה- x בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה- y בנקודה B. מנקודה C שעל ציר ה- x בין O ל-A

(O ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה- x שחותך את הישר AB בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודת מפגש הישרים BC ו-OD.

16 נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה C. נסמן ב-B את אמצע הקטע AC. מנקודה C העבירו מקביל ל-AO (O ראשית הצירים). מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל-AO.

17 נתונות הנקודות $A(4,0)$ ו- $B(-2,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית $\angle C$ במשולש $\triangle ABC$.

- (18) נתון מעגל קנוני שרדיוסו R . את נקודה A שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים ועל הקטע AO (O ראשית הצירים) סימנו נקודה B כך שמתקיים $AB : BO = a : b$ מנקודה A העבירו אנך לציר ה- x ומנקודה B העבירו אנך לציר ה- y .
 א. מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו.
 ב. המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- y בנקודות P ו- Q . מצא את אורך הקטע PQ .

תשובות סופיות:

- $$\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 + (y - 12)^2 = 38\frac{1}{4} \quad (2) \quad y = -2x \quad (1)$$
- $$y^2 = 24x \quad (4) \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (3)$$
- $$y^2 = 16 - 8x, -4 < x, y < 4 \quad (6) \quad x + 11y + 4 = 0, 7x + 13y - 8 = 0 \quad (5)$$
- $$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \quad (8) \quad y = 6x - 16 \quad (7)$$
- $$y = 3x - 16, x \neq 5\frac{1}{3} \quad (10) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (9)$$
- $$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 12 \quad (12) \quad y = 3x - 7 \quad (11)$$
- $$x = 6, -10 < y < 10 \quad (14) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = 4R^2 \quad (13)$$
- $$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (16) \quad 3x + 8y - 12 = 0, 0 < y < 3, 0 < x < 4 \quad (15)$$
- $$(x + 4)^2 + y^2 = 16 \quad (17)$$
- $$PQ = \frac{2bR}{a+b} \quad (18) \quad \text{א. } b^2x^2 + (a+b)^2y^2 = R^2b^2 \quad \text{ב.}$$

שאלות הוכחה:

שאלות:

(1) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישרים $x = R$ ו- $x = -R$ בנקודות A ו-B. הוכח: $y_A \cdot y_B = R^2$.

(2) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, שחותך את ציר ה-y בנקודות $A(0, R)$ ו- $B(0, -R)$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר $y = R$ בנקודה T. הוכח: $OT \parallel BP$.

(3) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ש- F_1 ו- F_2 הם מוקדיה. הוכח: $PO^2 + PF_1 \cdot PF_2 = a^2 + b^2$ (O ראשית הצירים).

(4) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A וקדקודה השמאלי הוא B. הישר AP חותך את הישר $x = -a$ בנקודה K והישר BP חותך את הישר $x = a$ בנקודה L. הוכח: $y_K \cdot y_L = 4b^2$.

(5) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.

(6) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A, קדקודה השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא F_1 . הישר AP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה M והישר BP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה N. הוכח: $\angle MF_1N = 90^\circ$.

(7) נתונה האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא $-\frac{b^2}{a^2}$.

- (8) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים נורמל. הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה- x הוא גודל קבוע.
- (9) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו-B. המשיקים נפגשים בנקודה C. הוכח: $y_A + y_B = 2y_C$.
- (10) בנקודה A, שעל הפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדריך שלה בנקודה B. ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המשיק בנקודה C. הוכח: $FB = FC$ (F - מוקד הפרבולה).
- (11) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. המיתר חותך את ציר ה- x בנקודה C. הוכח: $x_A \cdot x_B = (x_C)^2$.