

# קורס ריענון במתמטיקה לסטודנטים מתחילים

פרק 27 - גיאומטריה אנליטית - מקומות גיאומטרים והוכחות

תוכן העניינים

1. מקומות גיאומטרים..... 1
2. שאלות הוכחה..... 5

## מקומות גיאומטריים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

מקום גאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.

מקום גאומטרי הוא משוואה המקשרת בין  $x$  ל-  $y$ .

#### טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:

בשאלות של מקום גאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

#### • שיפועים:

i. שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).

ii. שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא -1).

iii. שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.

#### • משפט פיתגורס.

#### • אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.

#### • משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.

#### • קטע מרכזים:

i. במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים.

ii. במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.

#### • משפטים מגאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)

#### • אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה.

## שאלות:

- (1) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה  $A(-7, -6)$  שווה למרחקן מהנקודה  $B(9, 2)$ .
- (2) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה  $A(3, -6)$  גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה  $B(-1, 10)$ .
- (3) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה  $(1, 0)$  קטן פי 3 ממרחקן מהישר  $x = 9$ .
- (4) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה  $(6, 0)$  ומשיקים לישר  $x = -6$ .
- (5) נתונים שני ישרים: I.  $3x + y - 6 = 0$ , II.  $2x + 6y - 1 = 0$ . מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II.
- (6) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- $y$  מימין ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?
- (7) מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה  $(4, -10)$  עם נקודות על הישר  $y = 6x + 2$ .
- (8) נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$ . מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.
- (9) נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 36$ . הכפילו את שיעורי ה- $y$  של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$ . מצא את המקום הגאומטרי שמתקבל באופן הזה.

**10** נתונות הנקודות  $A(2,0)$  ו-  $B(10,0)$ . מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים ABC אם ידוע שהקודקוד C מונח על הישר  $y = 3x - 12$ . מהי ההגבלה?

**11** נתון המעגל  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$ . מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה  $(7,2)$ .

**12** מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$  בזווית של  $120^\circ$ .

**13** מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  בזווית של  $60^\circ$ .

**14** נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו  $x^2 + y^2 - 12x - 64 = 0$ . מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה- $x$  שחותך את ציר ה- $x$  בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C. בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה- $x$ . המקביל ל-AM והמקביל לציר ה- $x$  נפגשים בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודה D. מהן ההגבלות?

**15** האליפסה  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  חותכת את חלקו החיובי של ציר ה- $x$  בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה- $y$  בנקודה B. מנקודה C שעל ציר ה- $x$  בין O ל-A

(O ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה- $x$  שחותך את הישר AB בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודת מפגש הישרים BC ו-OD.

**16** נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה- $x$  שחותך את ציר ה- $x$  בנקודה C. נסמן ב-B את אמצע הקטע AC. מנקודה C העבירו מקביל ל-AO (O ראשית הצירים). מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל-AO.

**17** נתונות הנקודות  $A(4,0)$  ו-  $B(-2,0)$ . מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית  $\angle C$  במשולש  $\triangle ABC$ .

- (18) נתון מעגל קנוני שרדיוסו  $R$ . את נקודה  $A$  שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים ועל הקטע  $AO$  (  $O$  ראשית הצירים) סימנו נקודה  $B$  כך שמתקיים  $AB : BO = a : b$  מנקודה  $A$  העבירו אנך לציר ה- $x$  ומנקודה  $B$  העבירו אנך לציר ה- $y$ .  
 א. מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו.  
 ב. המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- $y$  בנקודות  $P$  ו- $Q$ . מצא את אורך הקטע  $PQ$ .

## תשובות סופיות:

- (1)  $y = -2x$  (2)  $\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 + (y - 12)^2 = 38\frac{1}{4}$   
 (3)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$  (4)  $y^2 = 24x$   
 (5)  $x + 11y + 4 = 0, 7x + 13y - 8 = 0$  (6)  $y^2 = 16 - 8x, -4 < x, y < 4$   
 (7)  $y = 6x - 16$  (8)  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$   
 (9)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$  (10)  $y = 3x - 16, x \neq 5\frac{1}{3}$   
 (11)  $y = 3x - 7$  (12)  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 12$   
 (13)  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4R^2$  (14)  $x = 6, -10 < y < 10$   
 (15)  $3x + 8y - 12 = 0, 0 < y < 3, 0 < x < 4$  (16)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$   
 (17)  $(x + 4)^2 + y^2 = 16$  (18) א.  $b^2x^2 + (a + b)^2y^2 = R^2b^2$  ב.  $PQ = \frac{2bR}{a + b}$

## שאלות הוכחה:

### שאלות:

(1) הנקודה P נמצאת על המעגל  $x^2 + y^2 = R^2$ . בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישרים  $x = R$  ו-  $x = -R$  בנקודות A ו-B. הוכח:  $y_A \cdot y_B = R^2$ .

(2) הנקודה P נמצאת על המעגל  $x^2 + y^2 = R^2$ , שחותך את ציר ה-y בנקודות  $A(0, R)$  ו-  $B(0, -R)$ . בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר  $y = R$  בנקודה T. הוכח:  $OT \parallel BP$ .

(3) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , ש-  $F_1$  ו-  $F_2$  הם מוקדיה. הוכח:  $PO^2 + PF_1 \cdot PF_2 = a^2 + b^2$  (O ראשית הצירים).

(4) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , שקודקודה הימני הוא A וקדקודה השמאלי הוא B. הישר AP חותך את הישר  $x = -a$  בנקודה K והישר BP חותך את הישר  $x = a$  בנקודה L. הוכח:  $y_K \cdot y_L = 4b^2$ .

(5) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.

(6) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , שקודקודה הימני הוא A, קדקודה השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא  $F_1$ . הישר AP חותך את הישר  $x = \frac{a^2}{c}$  בנקודה M והישר BP חותך את הישר  $x = \frac{a^2}{c}$  בנקודה N. הוכח:  $\angle MF_1N = 90^\circ$ .

(7) נתונה האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא  $-\frac{b^2}{a^2}$ .

- (8) בפרבולה  $y^2 = 2px$  מעבירים נורמל. הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה- $x$  הוא גודל קבוע.
- (9) בפרבולה  $y^2 = 2px$  מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו-B. המשיקים נפגשים בנקודה C. הוכח:  $y_A + y_B = 2y_C$ .
- (10) בנקודה A, שעל הפרבולה  $y^2 = 2px$  מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדריך שלה בנקודה B. ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה- $x$  שחותך את המשיק בנקודה C. הוכח:  $FB = FC$  (F - מוקד הפרבולה).
- (11) בפרבולה  $y^2 = 2px$  מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. המיתר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה C. הוכח:  $x_A \cdot x_B = (x_C)^2$ .