

מתמטיקה תיכונית מנקודת מבט מתקדמת

פרק 10 - גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה

תוכן העניינים

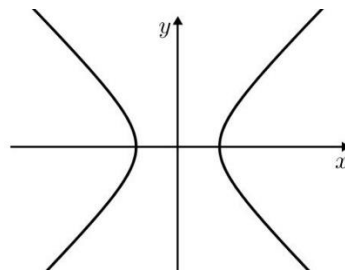
1. הגדרות יסודיות..... 1
2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה..... 2
3. רדיוסים של היפרבולה..... 3
4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה..... 4
5. אסימפטוטות של היפרבולה..... 5

הגדרות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.



- משוואת היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- היפרבולה שבה $a = b$, נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים: $c^2 = a^2 + b^2$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה $x^2 - 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

תשובות סופיות:

- (1) אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1 \quad (3)$$

הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה:

שאלות:

(4) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה המדומה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת בנקודה $(-10, 3\sqrt{5})$.

(5) מצא משוואת היפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא $\sqrt{200}$.

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad (4)$$

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (5)$$

רדיוסים של היפרבולה:

סיכום כללי:

רדיוסים באליפסה	רדיוסים בהיפרבולה
$r_1 = a - \frac{cx}{a}$	$r_1 = \left \frac{cx}{a} - a \right $
$r_2 = a + \frac{cx}{a}$	$r_2 = \left \frac{cx}{a} + a \right $

שאלות:

- (6) נתונה ההיפרבולה שמשוואתה: $6x^2 - y^2 = 18$. מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.
- (7) נתונה ההיפרבולה שמשוואתה: $7x^2 - 9y^2 = 63$. מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא $74\frac{8}{9}$.
- (8) נתונה ההיפרבולה שמשוואתה $4x^2 - y^2 = 20$. מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.
- (9) נתונה ההיפרבולה שמשוואתה $5x^2 - 4y^2 = 80$. מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה-x, החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני F_1 של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה F_2 . נתון כי היקף הטרפז F_1BAF_2 הוא 29 יחידות אורך. מצא את שיעורי הנקודה A.

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \left(\pm 4, \pm 2\frac{1}{3} \right) & (7) \\ \left(5, \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \right) & (9) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (\pm 2, \pm \sqrt{6}) & (6) \\ (3, -4) & (8) \end{array}$$

מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

סיכום כללי:

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא: $\frac{a^2}{b^2}$.

שאלות:

10 נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - 3y^2 = 24$. מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה $(3, 4)$ היא אמצעו.

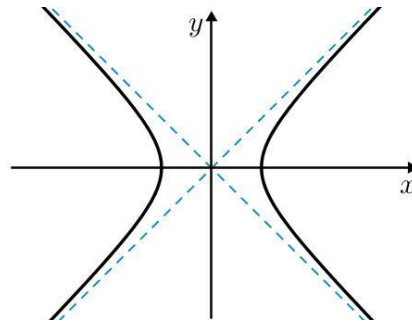
תשובות סופיות:

$$y = x + 1 \quad \mathbf{10}$$

אסימפטוטות של היפרבולה:

סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.



- משוואות האסימפטוטות הן: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.

שאלות:

11 מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - y^2 = 48$.

12 הישר $y = -\frac{3}{4}x$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20. מצא את משוואת ההיפרבולה.

13 נתונה היפרבולה שמשוואתה $9x^2 - 4y^2 = k$ ואורך צירה המדומה הוא 6. מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

14 ישר שעובר בנקודה $(-6, 8)$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(9, -8\sqrt{2})$.
 א. מצא את משוואת ההיפרבולה.
 ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

15 מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(4, -1)$ מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה $16x^2 + 25y^2 = 400$. מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסימפטוטה העולה של ההיפרבולה הוא $1\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות:

$$y = 2x, y = -2x \quad (11)$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad (12)$$

$$(2, -3) \quad (13)$$

$$d = 4 \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\left(-3, \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \quad (15)$$