

קורס השלמה במתמטיקה

פרק 20 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה

תוכן העניינים

1. האליפסה 1

האליפסה:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $(-3\sqrt{3}, 2)$.
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $(\sqrt{10}, 0)$.
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -2\sqrt{5})$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $(-2, \sqrt{6})$ ו- $(\sqrt{14}, 1)$.
- (8) מצא על האליפסה $3x^2 + 4y^2 = 144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.
- (9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3, 1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
- (10) מצא על האליפסה $x^2 + 3y^2 = 12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

(11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2 + 4y^2 = 50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

(12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ והישר $y = 2x + k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

(13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2 + 5y^2 = 120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(15) באליפסה $5x^2 + 9y^2 = 90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

(16) באליפסה $x^2 + 5y^2 = 16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

(17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y .

מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $(4\sqrt{2}, 0)$.

(18) מצא באליפסה $2x^2 + 3y^2 = 12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5, 1)$.

(19) ישר שמשוואתו $x - y - 3 = 0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2, -1)$. מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2\sqrt{2}, -2)$.

$$(20) \text{ נתונה המשוואה } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1, (0 < a \neq 5).$$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a = 4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 2a = 12, 2b = 6 \quad (2) \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (3) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(4) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (5) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad (6) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$(7) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (8) \quad (4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24})$$

$$(9) \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (10) \quad (\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$$

$$(11) \quad y = \sqrt{6}x \quad (12) \quad \text{משיק: } k = \pm 12, \text{ חותך: } -12 < k < 12.$$

$$(13) \quad S = 60 \text{ יח"ש} \quad (14) \quad S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (15) \quad S = 26 \frac{2}{3} \text{ יח"ש}$$

$$(16) \quad (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}) \quad (17) \quad \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (18) \quad y = -x + 2.5$$

$$(19) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (20) \quad \text{א. i. } a = \sqrt{12.5} \quad \text{ii. } a \neq \sqrt{12.5}$$