

# מתמטיקה תיכונית מנקודת מבט מתקדמת

פרק 9 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

תוכן העניינים

1. האליפסה ..... 1
2. הפרבולה ..... 5

## האליפסה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



#### מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $x$ .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $y$ .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).  
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$ . המוקדים יסומנו ב- $F_1$  ו- $F_2$  ושיעוריהם הם:  $F_1(c,0)$ ,  $F_2(-c,0)$ .
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.  
אורך הרדיוס מנקודה  $(x, y)$  שעל האליפסה למוקד הימני הוא:  $r_1 = a - \frac{cx}{a}$ .  
אורך הרדיוס מנקודה  $(x, y)$  שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא:  $r_2 = a + \frac{cx}{a}$ .
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

#### משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  או  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ .
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא:  $a^2 - b^2 = c^2$ .
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$ .

## שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה  $x^2 + 4y^2 = 36$ .
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא  $2\sqrt{3}$ .
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה  $8\sqrt{2}$ .
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה  $(-3\sqrt{3}, 2)$ .
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 16$  ומוקד אחד שלה הוא בנקודה  $(\sqrt{10}, 0)$ .
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0, -2\sqrt{5})$  והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות  $(-2, \sqrt{6})$  ו- $(\sqrt{14}, 1)$ .
- (8) מצא על האליפסה  $3x^2 + 4y^2 = 144$  את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.
- (9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה  $(-3, 1)$  ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
- (10) מצא על האליפסה  $x^2 + 3y^2 = 12$  את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

- 11** מצא את משוואתו של קוטר באליפסה  $x^2 + 4y^2 = 50$  ששיפועו חיובי ואורכו  $\sqrt{56}$ .
- 12** נתונים האליפסה  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  והישר  $y = 2x + k$ . מצא לאלו ערכים של הפרמטר  $k$  הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר  $k$  הישר חותך את האליפסה.
- 13** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה  $3x^2 + 5y^2 = 120$  כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
- 14** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
- 15** באליפסה  $5x^2 + 9y^2 = 90$  חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.
- 16** באליפסה  $x^2 + 5y^2 = 16$  חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.
- 17** באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- $y$ . מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה  $(4\sqrt{2}, 0)$ .
- 18** מצא באליפסה  $2x^2 + 3y^2 = 12$  משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא  $(1.5, 1)$ .
- 19** ישר שמשוואתו  $x - y - 3 = 0$  חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה  $(2, -1)$ . מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(2\sqrt{2}, -2)$ .

$$(20) \text{ נתונה המשוואה } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1, (0 < a \neq 5).$$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של  $a$  המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של  $a$  המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור  $a = 4$  אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad 2a = 12, 2b = 6$$

$$(2) \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(4) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(5) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$(6) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$(7) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(8) \quad (4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24})$$

$$(9) \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(10) \quad (\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$$

$$(11) \quad y = \sqrt{6}x$$

$$(12) \text{ משיק: } k = \pm 12, \text{ חותך: } -12 < k < 12.$$

$$(13) \quad S = 60 \text{ יח"ש}$$

$$(14) \quad S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$(15) \quad S = 26 \frac{2}{3} \text{ יח"ש}$$

$$(16) \quad (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$$

$$(17) \quad \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$(18) \quad y = -x + 2.5$$

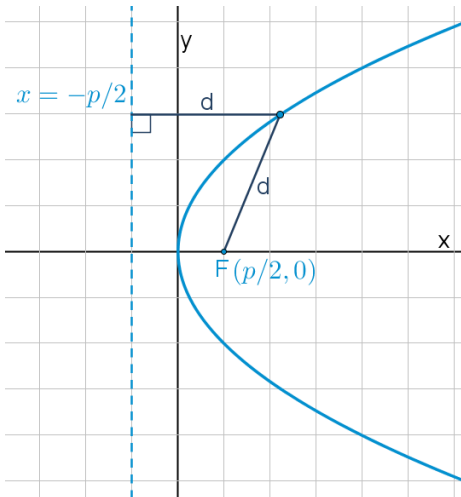
$$(19) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$(20) \text{ א. } a = \sqrt{12.5} \text{ .ii } a \neq \sqrt{12.5}$$

## הפרבולה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

#### מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה:  $r = x + \frac{p}{2}$ .
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- $x$  אצלנו).

#### משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא:  $y^2 = 2px$  כאשר  $p$  הוא פרמטר הפרבולה.

### משיק לפרבולה:

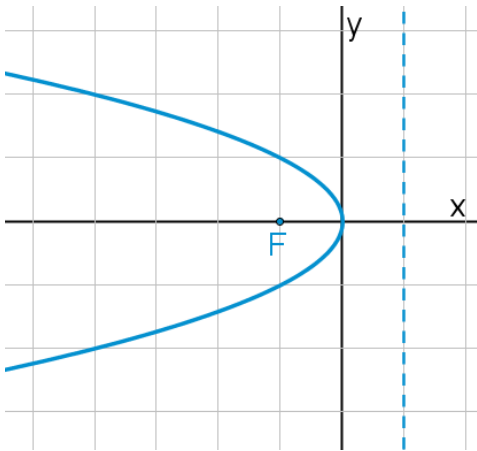
- משוואת המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $A(x_0, y_0)$  שעליה היא:  $yy_0 = p(x + x_0)$ .
- שיפוע המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $A(x_0, y_0)$  שעליה הוא:  $m = \frac{p}{y_0}$ .

### מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

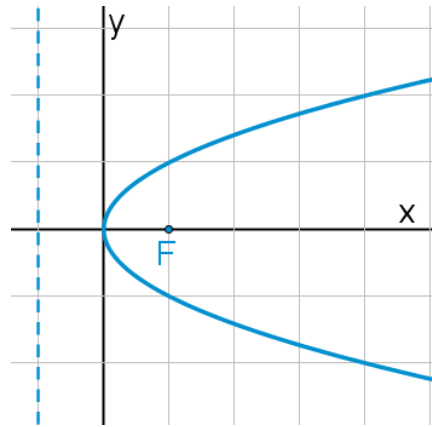
- משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה  $y^2 = 2px$  היוצאים מהנקודה  $A(x_0, y_0)$  שמחוץ לפרבולה היא:  $yy_0 = p(x + x_0)$ .

### תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה  $y^2 = -2px$ :



פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$ :



### שאלות:

- (1) נתונה הפרבולה  $y^2 = 18x$ . מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
- (2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר  $x = -3$  הוא המדריך שלה.
- (3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

- (4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה  $(-6, 9)$ .
- (5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה  $x^2 + 2y^2 = 18$ .
- (6) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 6x$  שמרחקן מהמוקד הוא 4.
- (7) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 8x$  שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (8) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 2px$  שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה  $y^2 = 10x$ .
- (10) הבע באמצעות  $p$  את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה  $y^2 = 2px$ .
- (11) נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$ . הבע באמצעות  $p$  את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- $x$ , וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.
- (12) את נקודה A שעל הפרבולה  $y^2 = 20x$  חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- $x$  שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.
- (13) קצות מיתר בפרבולה  $y^2 = 4x$  הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- $x$  של נקודה A הוא 4.
- (14) מצא משוואת מיתר בפרבולה  $y^2 = 16x$ , שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא  $\frac{8}{\sqrt{5}}$ .

15) מצא משוואת מיתר בפרבולה  $y^2 = 2x$ , שאמצעו בנקודה  $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .

16) נתונה הפרבולה  $y^2 = 4x$  והישר  $y = 2x + k$ , לאיזה ערך של  $k$  הישר משיק לפרבולה?

17) נתונה הפרבולה  $y^2 = 6x$ .

- א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן  $x = 1.5$ .  
 ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- $x$ .

18) הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה  $y^2 = 12x$ . נתון כי  $y_A = 4$ . מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

19) נקודה A נמצאת על הפרבולה  $y^2 = 28x$  ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- $x$  הוא  $7\sqrt{5}$ . מצא את משוואת הנורמל.

20) מרחק המוקד של הפרבולה  $y^2 = 8x$  ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא  $\sqrt{8}$ . מצא את משוואת המשיק.

21) נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$ . הבע באמצעות  $p$  את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא  $p$ .

22) נתונות שתי פרבולות: I.  $y^2 = 6x$ , II.  $y^2 = 12x$ . ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B. הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

23) נתונה הפרבולה  $y^2 = 14x$  והנקודה  $(-1, -3)$ , ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

- (24)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 18x$  ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- $x$  שלה קטן ב-1 משיעור ה- $y$  שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.
- (25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה  $y^2 = 24x$  והוא משיק למדרוך שלה.
- (26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה  $(8,0)$  והוא משיק לפרבולה  $y^2 = 10x$  בשתי נקודות.
- (27)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$  ומעגל שמרכזו על ציר ה- $x$  והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות  $p$  את משוואת המעגל.
- (28)** הנקודה  $A(2,3)$  נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה  $A$  ומשיק לציר ה- $y$ .
- (29)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$  שבה  $p > 4$ . הישר  $x = 2$  חותך את הפרבולה בנקודות  $A$  ו- $B$ . הבע באמצעות  $p$  את שיעורי קדקוד  $C$  של משולש  $\triangle ABC$  שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד  $C$  נמצא על ציר ה- $x$ .
- (30)** אליפסה שמשוואתה  $x^2 + 4y^2 = 16$  חותכת את הפרבולה  $y^2 = 2px$  בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעויך. מצא את משוואת הפרבולה.

## תשובות סופיות:

- (1)  $p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$
- (2)  $y^2 = 12x$
- (3)  $y^2 = 10x$
- (4)  $y^2 = 4x$
- (5)  $y^2 = 12x$
- (6)  $\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right)$
- (7)  $(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8})$
- (8)  $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$
- (9)  $S_{OAB} = 300\sqrt{3}$  יח"ש
- (10)  $S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2$  יח"ש
- (11)  $S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2$  יח"ש
- (12)  $S_{ABCF} = 40\frac{5}{8}$  יח"ש
- (13)  $B\left(\frac{1}{4}, 1\right)$  או  $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
- (14)  $y = -2x$  או  $y = 2x$
- (15)  $y = 2x - 2$
- (16)  $k = \frac{1}{2}$
- (17)  $y = x + 1\frac{1}{2}, y = -x - 1\frac{1}{2}$  .א
- (18)  $B\left(6\frac{3}{4}, -9\right)$
- (19)  $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8}$
- (20)  $y = x + 2$
- (21)  $A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right)$
- (22) הוכחה.
- (23)  $7x + 3y - 7 = 0$
- (24)  $y = -9x + 18$
- (25)  $(x - 6)^2 + y^2 = 144$
- (26)  $(x - 8)^2 + y^2 = 55$
- (27)  $\left(x - 2\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 4p^2$
- (28)  $\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{25}{16}$
- (29)  $C(p + 2, 0)$
- (30)  $y^2 = 1\frac{1}{2}x$