# מבוא לחדו"א

## פרק 14 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

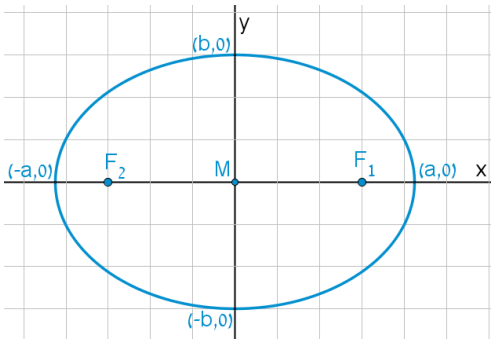
### תוכן העניינים

1. האליפסה . . . . . 1
2. הפרבולה . . . . . 5

# האליפסה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

**מושגים באליפסה:**

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $x$.
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $y$.
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורך סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- $F_1$ ו- $F_2$ ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$ , $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה $(x,y)$ שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה $(x,y)$ שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

**משוואות וקשרים:**

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

## שאלות:

**1)** מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

**2)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

**3)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

**4)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $\left(-3\sqrt{3},2\right)$.

**5)** מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2+y^2=16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $\left(\sqrt{10},0\right)$.

**6)** מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- $y$ בנקודה $\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.

**7)** מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $\left(-2,\sqrt{6}\right)$ ו- $\left(\sqrt{14},1\right)$.

**8)** מצא על האליפסה $3x^2+4y^2=144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

**9)** מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

**10)** מצא על האליפסה $x^2+3y^2=12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

**11)** מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2+4y^2=50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

**12)** נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ והישר $y=2x+k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר $k$ הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר $k$ הישר חותך את האליפסה.

**13)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2+5y^2=120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**14)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**15)** באליפסה $5x^2+9y^2=90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

**16)** באליפסה $x^2+5y^2=16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

**17)** באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- $y$.
מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $\left(4\sqrt{2},0\right)$.

**18)** מצא באליפסה $2x^2+3y^2=12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $\left(1.5,1\right)$.

**19)** ישר שמשוואתו $x-y-3=0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $\left(2,-1\right)$.
מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(2\sqrt{2},-2\right)$.

**20)** נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-25}=1$ , $(0<a\neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של $a$ המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של $a$ המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a=4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

## תשובות סופיות:

**1)** $2a=12$ , $2b=6$

**2)** $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{3}=1$

**3)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

**4)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

**5)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$

**6)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

**7)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

**8)** $\left(4,\sqrt{24}\right)$ , $\left(4,-\sqrt{24}\right)$ , $\left(-4,\sqrt{24}\right)$ , $\left(-4,-\sqrt{24}\right)$

**9)** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

**10)** $\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ , $\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ , $\left(\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$ , $\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$

**11)** $y=\sqrt{6}x$

**12)** משיק: $k=\pm 12$ , חותך: $-12<k<12$.

**13)** $S=$ 60 יח"ש

**14)** $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

**15)** $S=$ יח"ש $26\frac{2}{3}$

**16)** $\left(1,\sqrt{3}\right)$ , $\left(1,-\sqrt{3}\right)$

**17)** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$

**18)** $y=-x+2.5$

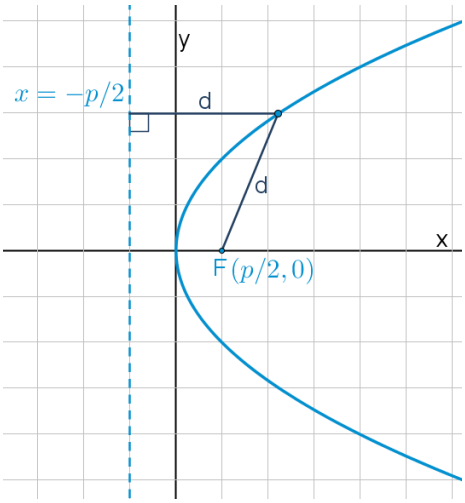
**19)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

**20)** א. i. $a=\sqrt{12.5}$ ii. $a\neq\sqrt{12.5}$

# הפרבולה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה.
הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

**מושגים בפרבולה:**

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- $x$ אצלנו).

**משוואת הפרבולה:**

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר $p$ הוא פרמטר הפרבולה.

**משיק לפרבולה:**

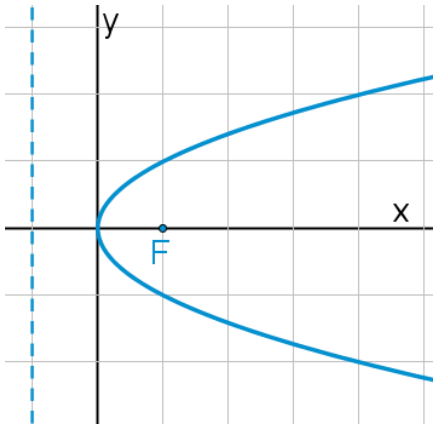
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה הוא: $m=\frac{p}{y_0}$.

**מיתר המחבר שתי נקודות השקה:**

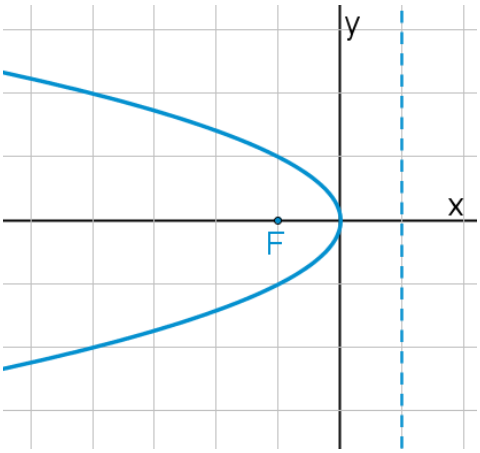
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2=2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0,y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.

**תיאורים גרפיים:**

פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$:




פרבולה שמשוואתה $y^2=-2px$:




**שאלות:**

**1)** נתונה הפרבולה $y^2=18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

**2)** מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x=-3$ הוא המדריך שלה.

**3)** מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

**4)** מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9,-6)$.

**5)** מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2+2y^2=18$.

**6)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

**7)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

**8)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

**9)** מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=10x$.

**10)** הבע באמצעות $p$ את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=2px$.

**11)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות $p$ את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה-$x$, וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

**12)** את נקודה A שעל הפרבולה $y^2=20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה-$x$ שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

**13)** קצות מיתר בפרבולה $y^2=4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה-$x$ של נקודה A הוא 4.

**14)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

**15)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=2x$ , שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

**16)** נתונה הפרבולה $y^2=4x$ והישר $y=2x+k$ , לאיזה ערך של $k$ הישר משיק לפרבולה?

**17)** נתונה הפרבולה $y^2=6x$ .

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x=1.5$ .

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה-$x$ .

**18)** הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2=12x$ . נתון כי $y_A=4$ .
מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

**19)** נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2=28x$ בربיע הרביעי.
אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה-$x$ הוא $7\sqrt{5}$ .
מצא את משוואת הנורמל.

**20)** מרחק המוקד של הפרבולה $y^2=8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$ .
מצא את משוואת המשיק.

**21)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ . הבע באמצעות $p$ את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא $p$ .

**22)** נתונות שתי פרבולות: I. $y^2=6x$ , II. $y^2=12x$
ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B.
הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

**23)** נתונה הפרבולה $y^2=14x$ והנקודה $(-1,-3)$ , ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

**24)** נתונה הפרבולה $y^2=18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה-$x$ שלה קטן ב-1 משיעור ה-$y$ שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18.
מצא את משוואת המיתר.

**25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2=24x$ והוא משיק למדריך שלה.

**26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2=10x$ בשתי נקודות.

**27)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה-$x$ והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות $p$ את משוואת המעגל.

**28)** הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה-$y$.

**29)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ שבה $p>4$. הישר $x=2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. הבע באמצעות $p$ את שיעורי קדקוד C של משולש $\Delta ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה-$x$.

**30)** אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=16$ חותכת את הפרבולה $y^2=2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

## תשובות סופיות:

**1)** $p=9$ , $\mathrm{F}\left(4\frac{1}{2},0\right)$

**2)** $y^2=12x$

**3)** $y^2=10x$

**4)** $y^2=4x$

**5)** $y^2=12x$

**6)** $\left(2\frac{1}{2},\sqrt{15}\right)$ , $\left(2\frac{1}{2},-\sqrt{15}\right)$

**7)** $\left(1,\sqrt{8}\right)$ , $\left(1,-\sqrt{8}\right)$

**8)** $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ , $\left(\frac{p}{4},-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$

**9)** $S_{\mathrm{OAB}}=300\sqrt{3}$ יח"ש

**10)** $S_{\mathrm{ABO}}=12\sqrt{3}p^2$ יח"ש

**11)** $S_{\mathrm{ABC}}=3\sqrt{3}p^2$ יח"ש

**12)** $S_{\mathrm{ABCF}}=40\frac{5}{8}$ יח"ש

**13)** $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},-1\right)$ או $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1\right)$

**14)** $y=2x$ או $y=-2x$

**15)** $y=2x-2$

**16)** $k=\frac{1}{2}$

**17)** א. $y=x+1\frac{1}{2}$ , $y=-x-1\frac{1}{2}$

**18)** $\mathrm{B}\left(6\frac{3}{4},-9\right)$

**19)** $y=\frac{1}{2}x-7\frac{7}{8}$

**20)** $y=x+2$

**21)** $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$

**22)** הוכחה.

**23)** $7x+3y-7=0$

**24)** $y=-9x+18$

**25)** $(x-6)^2+y^2=144$

**26)** $(x-8)^2+y^2=55$

**27)** $\left(x-2\frac{1}{2}p\right)^2+y^2=4p^2$

**28)** $\left(x-1\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{25}{16}$

**29)** $\mathrm{C}(p+2,0)$

**30)** $y^2=1\frac{1}{2}x$