

# מכניקה לתלמידי ביולוגיה 77148

פרק 22 - גוף קשיח -

תוכן העניינים

1. הגדרות, ציר סיבוב ותנע קווי..... 1
2. תנע זוויתי של גוף קשיח..... 2
3. אנרגיה סיבובית של גוף קשיח..... 5
4. ניתוח לפי כוחות ומומנטים וגלגול ללא החלקה..... 8
5. גלגול עם החלקה..... 11

## הגדרות, ציר סיבוב ותנע קווי:

**רקע:**

הגדרה: המרחק בין כל שתי נקודות על הגוף תמיד קבוע.

אם גוף קשיח מסתובב סביב ציר סיבוב כל נקודות על הגוף מבצעות תנועה מעגלית באותה מהירות הזוויתית (אך לא באותה מהירות קווית)

תנע קווי של גוף קשיח:

$$\vec{p} = M\vec{v}_{c.m.}$$

## תנע זוויתי של גוף קשיח:

רקע:

תנ"ז של גוף הנע בקו ישר (ללא סיבוב פנימי, כלומר לכל החלקים בגוף אותה מהירות קווית):

$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.}$$

תנ"ז של גוף קשיח המסתובב סביב ציר קבוע:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$I$  - מומנט ההתמד ביחס לציר

תנ"ז של תנועה משולבת (ציר שזז, כלומר הגוף גם זז וגם מסתובב):

$$\vec{L} = \vec{r}_{c.m.} \times \vec{p}_{c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$$

כאשר  $\vec{L}_{c.m.}$  הוא התנ"ז ביחס לציר העובר במרכז המסה ושווה ל-

$$\vec{L}_{c.m.} = I_{c.m.}\vec{\omega}$$

שאלות:



### 1) כדור מתנגש בדיסקה

דיסקה בעלת מסה  $M$  ורדיוס  $R$  מחוברת באמצעות ציר העובר במרכז להסלחן אופקי חסר חיכוך.

כדור פלסטלינה בעל מסה  $m$  נע במהירות  $V_0$  לעבר הדיסקה.

הכדור פוגע בדיסקה משמאלה, ובמרחק  $d$  ממרכז. הכדור נדבק לדיסקה ושניהם מתחילים להסתובב יחדיו (סביב הציר במרכז הדיסקה). הדיסקה נמצאת במנוחה לפני הפגיעה וכוח הכובד אינו משפיע על הגופים (המערכת אופקית). מצא את המהירות הזוויתית בה יסתובבו הגופים לאחר הפגיעה.

**(2) אדם קופץ מדיסקה**

נתונה דיסקה בעלת רדיוס  $R$  המסתובבת סביב מרכז במהירות זוויתית קבועה  $\omega$ . בקצה הדיסקה עומד איש נקודתי ומסתובב ביחד עם הדיסקה. ברגע מסוים האיש קופץ מהדיסקה ונתון כי מהירותו מיד לאחר הקפיצה היא  $V_0$  בכיוון הרדיאלי, ביחס לקרקע. מצא את המהירות הזוויתית של הדיסקה לאחר הקפיצה אם נתונים מסת האיש  $m$  ומסת הדיסקה  $M$ .

**(3) דוגמה - תנע זוויתי של תנועה משולבת**

נתון מוט בעל אורך  $L$  ומסה  $M$ . המרחק בין הקצה התחתון של המוט עד ראשית הצירים הוא  $d$ . המוט מסתובב בכיוון השעון מסביב לראשית. חשב את התנע הזוויתי.

**(4) שלושה כדורים**

שלושה כדורים זהים בעלי מסה  $m$  נמצאים בפינותיו של משולש שווה צלעות. הכדורים מחוברים באמצעות שלושה מוטות חסרי מסה ואורך  $L$  (צלעות המשולש).  
 א. חשבו את מיקום מרכז המסה של המערכת.  
 כעת, נתון כי הגוף מסתובב במהירות זוויתית  $\omega$  נתונה, סביב מרכז המסה שלו. ברגע מסוים, כאשר הגוף נמצא במצב המתואר בצור, הכדור התחתון ניתק מהגוף.  
 ב. מצאו את מהירות הכדור שניתק לאחר הניתוק.  
 ג. מצאו את מהירות מרכז המסה של החלק הנותר.  
 ד. מצאו את המהירות הזוויתית של החלק הנותר סביב מרכז המסה שלו.

**(5) מסמר נועץ דיסקה מסתובבת**

דיסקה ברדיוס  $R$  ומסה  $m$  מונחת על שולחן אופקי במנוחה. מסובבים את הדיסקה במהירות זוויתית  $\omega$  סביב מרכז המסה של (סביב ציר  $z$ ). מסמר נופל מהשמים ופוגע בקצה של הדיסקה ונועץ אותה לשולחן.  
 א. מהי המהירות הזוויתית של הדיסקה סביב המסמר לאחר הנעיצה?  
 ב. ענו שוב על השאלה רק הפעם הניחו שבנוסף לסיבוב, מרכז המסה של הדיסקה נע במהירות  $v$  לפי הנעיצה.

## תשובות סופיות:

$$\omega = \frac{mv_0 d}{I} \quad (1)$$

$$\omega' = \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)\omega_0}{\frac{1}{2}M} \quad (2)$$

$$\left(\frac{L}{2} + d\right)^2 M\omega + I_{c.m.}\omega_{c.m.} = L \quad (3)$$

$$v_{1,2,c.m.} = \frac{1}{2}\omega R \hat{x} \quad \text{ג.} \quad v_3 = -\omega R \hat{x} \quad \text{ב.} \quad y_{c.m.} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad x_{c.m.} = \frac{L}{2} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$I_{1,2,3}\omega = m|v_3|R + 2mv_{1,2}y_{c.m.} + 2m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{1}{3}\left(\omega + 2\frac{v}{R}\right) \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{3}\omega \quad \text{א.} \quad (5)$$

## אנרגיה סיבובית של גוף קשיח:

### רקע:

אנרגיה קינטית סיבובית סביב ציר קבוע כלשהו:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

אנרגיה קינטית עבור ציר לא קבוע (תנועה משולבת) העובר במרכז המסה:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} I_{c.m.} \omega^2$$

אנרגיה קינטית עבור ציר לא קבוע (תנועה משולבת) כלשהו\*:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2 + m \vec{r}_{c.m.,o} \cdot (\vec{v}_o \times \vec{\omega})$$

$I_o$  - מומנט ההתמד ביחס לציר

$\vec{v}_o$  - היא מהירות הציר

$\vec{r}_{c.m.,o}$  - מיקום מרכז המסה ביחס לציר

\* השימוש בנוסחה מאוד נדיר

### שאלות:

#### 1) מוט מסתובב

מוט באורך  $L$  ומסה  $M$  מחובר לתקרה באמצעות ציר ויכול להסתובב. למוט מהירות זוויתית התחלתית  $\omega$ . מהי הזווית המקסימאלית אליה יגיע המוט?





### (2) דיסקה מחוברת למוט נופלת ממצב אנכי

גוף קשיח מורכב ממוט בעל אורך  $L$  ומסה  $M$  המחובר בקצה אחד לדיסקה מלאה בעלת מסה  $m$  המפולגת באופן אחיד ורדיוס  $R$ . בקצה השני, המוט מחובר לציר אופקי.

המוט חופשי להסתובב סביב הציר (כלומר הגוף יכול לעשות סיבוב אנכי סביב הציר). הגוף מתחיל מהמצב המתואר באיור (מצב אנכי לא יציב) ומקבל דחיפה קטנה לתוך הדף. מה תהיה המהירות הזוויתית של הגוף כאשר יגיע לנקודה הנמוכה ביותר?

### (3) כדור פוגע במוט שתלוי מהתקרה (כולל תנז)



כדור בעל מסה  $m$  פוגע במוט שתלוי מהתקרה במרחק  $x$  מציר הסיבוב של המוט. המוט בעל אורך  $L$  ובעל מסה  $M$ . מהירותו ההתחלתית של הכדור היא  $\mu_0$  והוא מתנגש פלסטית עם המוט.

א. מהי המהירות הזוויתית של המערכת מיד לאחר ההתנגשות?

ב. מהי הזווית המקסימלית אליה יגיע המוט?

ג. מצא  $x$  כך שהכוח שמפעילה התקרה על המוט יתאפס.

### (4) מסה מתנגשת בשתי מסות מחוברות במוט (כולל תנז)



שני גופים נקודתיים בעלי מסה  $M$  כל אחד מחוברים בשני קצותיו של מוט דק חסר מסה באורך  $l$ . המערכת נמצאת במנוחה על גבי משטח אופקי חלק לאורך ציר  $y$ .

כדור נוסף שמסתו  $m$  פוגע במוט במאונך למוט ובמרחק  $d$  ממרכז המוט. מהירות הכדור הנוסף היא  $v$  וההתנגשות עם המוט היא אלסטית.

מה צריכה להיות מהירותו של הכדור הנוסף, כך שישאר במנוחה לאחר ההתנגשות.

## תשובות סופיות:

$$\cos \theta = 1 - \frac{L\omega_0^2}{3g} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2MgL + 2mg(L+R)}{\frac{ML}{3} + \frac{1}{4}mR^2 + m(L+R)^2}} \quad (2)$$

$$\omega = \frac{mv_0x}{mx^2 + \frac{ML^2}{3}} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$x_{c.m} = \frac{M\frac{L}{2} + mx}{M+m}, \quad I = \frac{ML^2}{3} + mx^2 \quad \text{ב.} \quad \cos \theta = 1 - \frac{I\omega^2}{(M+m)gx_{c.m}}$$

ו- $\omega$  מצאנו בסעיף א'.

$$\mu_0 = M\frac{L}{r} + mx \quad \text{ג.} \quad (4)$$

$$m = \frac{2M}{1 + \frac{4d^2}{l^2}} \quad (5)$$

## ניתוח לפי כוחות ומומנטים וגלגול ללא החלקה:

רקע:

טבלת השוואה בין תנועה סיבובית לתנועה בקו ישר

תנועה בקו ישר	תנועה סיבובית
$x$	$\theta$
$v = \dot{x}$	$\omega = \dot{\theta}$
$a = \dot{v} = \ddot{x}$	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
$m$	$I$
$p$	$L$
$F$	$\tau$

כל הנוסחאות זהות בהחלפת אותיות

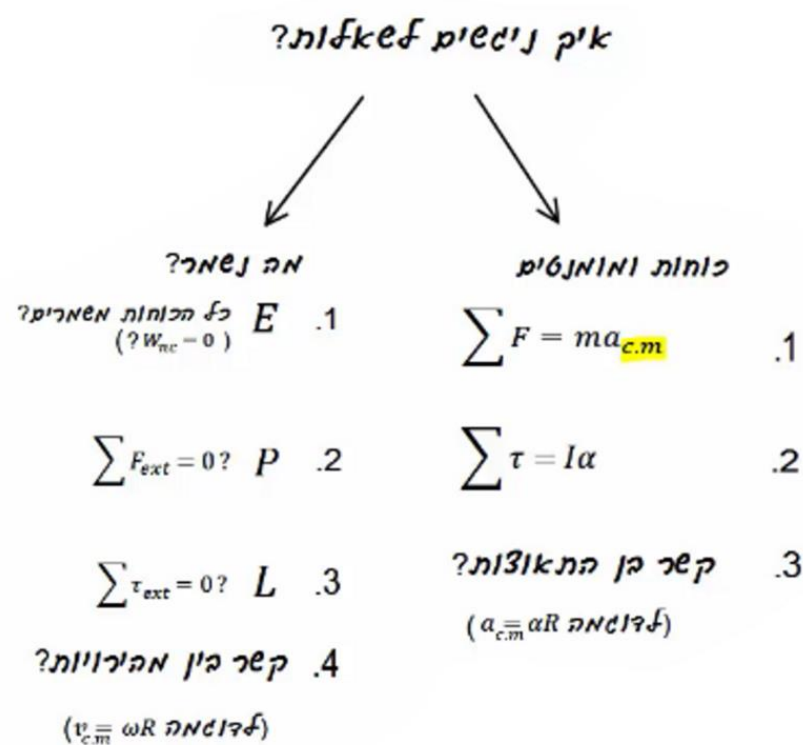
גלגול ללא החלקה:

מהירות הנקודה שנוגעת במשטח שווה לאפס

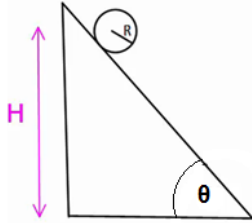
$$v_{c.m.} = \omega R$$

$$a_{c.m.} = \alpha R$$

בגלגול ללא החלקה החיכוך הוא סטטי ולכן אין איבוד אנרגיה.



## שאלות:

**(1) דוגמה - כדור על מדרון משופע**

- כדור בעל רדיוס  $R$  מונח בגובה  $H$  על מדרון משופע בעל זווית  $\alpha$ . הכדור מתחיל להתגלגל ללא החלקה.
- א. מצאו את מהירות הכדור בתחתית המדרון.
- ב. מצאו את תאוצת הכדור.

**(2) גלובוס**

- גלובוס (כדור) מונח ומקובע לשולחן ויכול להסתובב סביב ציר המאונך לשולחן.
- מלפפים חוט סביב מרכז הגלובוס (סביב קו המשווה) והחוט ממשיך מהגלובוס דרך גלגלת לא אידיאלית למסה תלויה  $m_1$ .

- נתונים גם:  $m_2$  ו- $R_2$  מסה ורדיוס הגלגלת,  $m_3$  ו- $R_3$  מסה ורדיוס הגלובוס.
- המערכת מתחילה ממנוחה.
- מצא את תאוצת כל הגופים, קווית וזוויתית ואת המתיחות בחוט.

**(3) יויו במישור מחובר למסה**

- יויו (כדור שמלופף סביבו חוט) בעל מסה  $m_2$  ורדיוס  $R$  מונח על מישור משופע בעל זווית  $\theta$ .
- החוט של היויו מחובר דרך גלגלת אידיאלית למסה  $m_1$ .
- נתון כי היויו מתגלגל ללא החלקה על המישור וכי קיים חיכוך בין היויו למישור.
- א. מצא לאן תנוע המערכת וכיוון החיכוך הסטטי.
- ב. מצא את תאוצות הגופים וגודל כוח החיכוך.

**4) מוט אופקי נופל**

מוט בעל מסה  $M$  (צפיפות אחידה) ואורך  $L$  תלוי בקצהו לקיר וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה. משחררים את המוט ממצב אופקי.



- מצא את התאוצה הזוויתית ואת תאוצת מרכז המסה של המוט ברגע השחרור. כעת המוט נופל עד להגיעו למצב מאונך לקרקע.
- מצא את הכוח שמפעיל הציר שמחבר את המוט לקיר על המוט, ברגע השחרור.
- מצא את המהירות הזוויתית של המוט ברגע זה (כשהוא מאונך לקרקע).
- חזור על סעיפים א' ו-ב' עבור רגע זה.

**5) משטח מלמעלה ומשטח מלמטה**

כדור בעל רדיוס  $R$  לחוץ בין שני משטחים נעים. המשטח מתחת לכדור נע במהירות  $v_1$  והמשטח מעליו נע במהירות  $v_2$ .

- מהי מהירות מרכז המסה של הכדור אם ידוע שהוא מתגלגל ללא החלקה ביחס לשני המשטחים?
- חזור על סעיף א' אם המשטח העליון נע בכיוון ההפוך.

**תשובות סופיות:**

$$(1) \quad \text{א. } mgH = \frac{1}{2} m v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} m R^2 \right) \left( \frac{v_{c.m.}}{R} \right)^2 \quad \text{ב. } a = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

(2) ראה סרטון.

(3) ראה סרטון.

$$(4) \quad \text{א. } a_{c.m.} = \frac{3}{4} g = a_y, a_x = a_r = 0, \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \quad \text{ב. } \sum F_y = m a_{y_{c.m.}}, \sum F_x = m a_{x_{c.m.}}$$

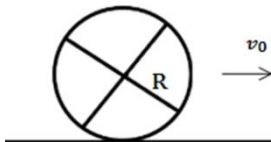
$$\text{ג. } mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{ד. } \sum F_y = m a_{y_{c.m.}}, \sum F_x = m a_{x_{c.m.}}, a_\theta = 0 = a_{x_{c.m.}}, a_y = a_r = -\omega^2 \frac{L}{2}, \alpha = 0$$

$$(5) \quad \text{א. } v_{c.m.} = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{ב. } v_{c.m.} = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

## גלגול עם החלקה:

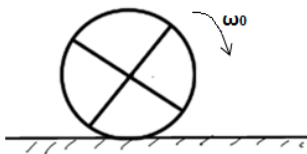
### שאלות:



#### (1) כדור מחליק ללא סיבוב

כדור הומוגני בעל מסה  $M$  מתחיל תנועתו עם מהירות  $V_0$  ללא סיבוב (מהירות זוויתית).

מצא את מהירותו הסופית אם נתון מקדם החיכוך הקינטי.



#### (2) כדור מסתובב מונח על רצפה

כדור הומוגני בעל מסה  $M$  מוחזק באוויר ומסתובב סביב מרכז המסה שלו במהירות זוויתית  $\omega_0$ .

הכדור מונח על הרצפה בעודו מסתובב.

מצא את מהירותו הסופית אם נתון מקדם החיכוך הקינטי  $\mu_k$ .

### תשובות סופיות:

$$V_{\text{final}} = \frac{5}{7} V_0 \quad (1)$$

$$V_{\text{final}} = \frac{2}{7} \omega_0 R \quad (2)$$