# מתמטיקה 70943-15

## פרק 2 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים


1. הסבר כללי (ללא ספר)
2. הצבה 1
3. צמצום 2
4. הכפלה בצמוד 3
5. פונקציה שואפת לאינסוף 4
6. x שואף לאינסוף 5
7. הגבול של אוילר 7
8. כלל הסנדוויץ' 8
9. גבול של פונקציה מפוצלת 9
10. גבול לפי הגדרה 10

# הצבה

## שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

## תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$ 2) $4$ 3) $-\frac{1}{12}$ 4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$ 6) $\frac{3}{4}$ 7) $\frac{1}{3}$ 8) $-\frac{8}{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\dfrac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

## תשובות סופיות

1) $\phi$
2) $\phi$
3) $-\infty$
4) $\phi$
5) $-\infty$
6) $\infty$
7) $\infty$
8) $\phi$
9) 0
10) 1
11) $\phi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# $x$ שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

**3)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

**4)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

**5)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

**6)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**7)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**8)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

**9)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

**10)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

**11)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**12)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**13)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**14)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**15)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

**16)** $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

**17)** $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

**18)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

**19)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

**20)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

**21)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

**22)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

**23)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

**24)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

## תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) $-\infty$
4) 0
5) -5
6) 1
7) -1
8) -3
9) 1.5
10) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
11) $\frac{1}{4}$
12) 0
13) 4
14) $\frac{1}{9}$
15) 2
16) $\ln 3$
17) $e^{\frac{1}{3}}$
18) 0
19) אם $b\neq 0$ : $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ . אם $a>0$ , $b=0$ : $\infty$ . אם : $a<0$ , $b=0$ : $-\infty$ .
20) 2.5
21) $\frac{k}{2}$
22) $\frac{1}{2}$
23) $-\frac{1}{2}$
24) $\frac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הגבול של אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

(היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$)

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

## תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) $1$ 3) $e^2$ 4) $e^{-1}$

5) $e^3$ 6) $e^{-12}$ 7) $e^{30}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל הסנדוויץ'

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את הגבול:

**1)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

**3)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

**4)** נתונה פונקציה $z:R\to R$ , המקיימת $\lim_{x\to 2}z(x)=4$ ,

ונתונה פונקציה $f:R\to R$ , המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$ , לכל $x$.

חשבו את הגבולות $\lim_{x\to 2}f(x),\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)$.

## תשובות סופיות

**1)** 4 **2)** 1 **3)** 0

**4)** $\lim_{x\to 2}f(x)=16$ , $\lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

חשבו את הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

**1)** $(a=1)\ ,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$

**2)** $(a=0)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

**3)** $(a=\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

**4)** $(a=-\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

**5)** א. $\lim_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

## תשובות סופיות

**1)** $\phi$ **2)** $\phi$ **3)** 1 **4)** -1

**5)** א. אין גבול. ב. $\dfrac{1}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול לפי הגדרה

## שאלות

בשאלות **1-5**, **על פי הגדרת הגבול**, הוכיחו:

**1)** $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

**2)** $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

**3)** $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

**4)** $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

**5)** $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x}{x^2-2}=1$

**6)** חשבו **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכיחו **על פי הגדרת הגבול**, את המקרים **7-10**:

**7)** $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

**8)** $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

**9)** $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

**10)** $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

**11)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=-5$.

הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x>M$,

מתקיים $f(x)<-4$.

**12)** נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=5$.

הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x>M$,

מתקיים $f^2(x)>16$.

**13)** נניח $f$ פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$.

הוכיחו שמתקיים $\lim_{x\to \infty} \sqrt{f(x)}=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** נתון הגבול הבא: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצאו ערך של $M>0$ עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1. במילים אחרות, מצאו $M$, כך ש-$\forall x>M:\ \left|f(x)-L\right|<0.1$.

**15)** מגדירים את הפונקציה הבאה: $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim_{x\to 2.5}f(x)$ ג. $\lim_{x\to\pi}f(x)$

**16)** בהינתן הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצאו $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, מתקיים אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$.

**17)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם: $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim_{x\to\infty}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ב. אם: $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ג. אם: $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=L$, אז: הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-$L$ או $-L$.

ד. אם הגבולות: $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ו-$\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיימים, אז גם הגבול $\lim_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

## תשובות סופיות

**6)** $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר GOOL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©