

# מתמטיקה מתקדמת לכלכלנים

פרק 5 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה ..... 1
3. צמצום ..... 2
4. הכפלה בצמוד ..... 3
5. גבולות טריגונומטריים ..... 4
6. פונקציה שואפת לאינסוף ..... 7
7. איקס שואף לאינסוף ..... 8
8. הגבול של אוילר ..... 10
9. כלל הסנדויץ' ..... 11
10. גבול של פונקציה מפוצלת ..... 13
11. גבול לפי הגדרה ..... 16

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

## הכפלה בצמוד

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4) \qquad -\frac{1}{12} \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8) \qquad \frac{1}{3} \quad (7) \qquad \frac{3}{4} \quad (6) \qquad \frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \quad (9)$$

## גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

## תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)
	$\frac{1}{4}$ (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13)	$-\sin a$ (12)	$\cos a$ (11)	$-\frac{1}{2}$ (10)	
1 (17)	$\frac{2}{\pi}$ (16)	$\frac{1}{2}$ (15)	$\frac{4}{10}$ (14)	$-\frac{1}{12}$ (18)

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

### תשובות סופיות

$\phi$ (4)	$-\infty$ (3)	$\phi$ (2)	$\phi$ (1)
$\phi$ (8)	$\infty$ (7)	$\infty$ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	$\phi$ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

## x שואף לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax + 1}{bx + 2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

## תשובות סופיות

$-\infty$ (4)	4 (3)	$-\frac{\pi}{2}$ (2)	0 (1)
-1 (8)	1 (7)	-5 (6)	0 (5)
$\frac{1}{4}$ (12)	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11)	1.5 (10)	-3 (9)
2 (16)	$\frac{1}{9}$ (15)	4 (14)	0 (13)
	0 (19)	$e^{\frac{1}{3}}$ (18)	$\ln 3$ (17)
. $-\infty: b=0, a < 0$ : א. $\infty: b=0, a > 0$ א. $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}: b \neq 0$ א. (20)			
$-\frac{1}{2}$ (24)	$\frac{1}{2}$ (23)	$\frac{k}{2}$ (22)	2.5 (21)
$\frac{5}{4}$ (28)	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27)	$\frac{a-b}{2}$ (26)	$\frac{1}{2}$ (25)
			$\ln(6e)$ (29)

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

## כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

(11) נתונה פונקציה  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$ ,

ונתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$  לכל  $x$ .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

(12) חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ .

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ .

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1$ ?

## תשובות סופיות

- 0 (5)      3 (4)       $\frac{3}{4}$  (3)      0 (2)      0 (1)
- 0 (10)      1 (9)      4 (8)       $\frac{3}{4}$  (7)      0 (6)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$        $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$  (11)
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$        $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12)
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

## גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

(1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{א.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) \quad \text{ב.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f} \quad \text{ג.}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1-x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x-6 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} \quad (3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) :$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ .

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ 4 + e^x & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

## תשובות סופיות

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$ , 3.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$ . א. (1)
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$ . ב.
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$ . ג.
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ . ג. 6. (2)
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ . ג. -1. (3)
4. (4)
- $\phi$ . (5)
- $\phi$ . (6)
1. (7)
- 1. (8)
- א. אין גבול. ב.  $\frac{1}{6}$ . (9)

## גבול לפי הגדרה

## שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול}$$

מצאו ערך של  $M > 0$ , עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו  $M$ , כך ש- $|\forall x > M : f(x) - L| < 0.1$ ).

$$(16) \quad \text{נגדיר את הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \quad \text{הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > L$ .

(23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |k|$  ( $k \neq 0$ )

## תשובות סופיות

(7)  $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)