מתמטיקה לכלכלנים

פרק 2 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי (ללא ספר)
2. הצבה 1
3. צמצום 2
4. הכפלה בצמוד 3
5. פונקציה שואפת לאינסוף 4
6. x שואף לאינסוף 5
7. הגבול של אוילר 7
8. כלל הסנדוויץ' 8
9. גבול של פונקציה מפוצלת 9

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$ 2) 4 3) $-\frac{1}{12}$ 4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$ 6) $\frac{3}{4}$ 7) $\frac{1}{3}$ 8) $-\frac{8}{3}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

תשובות סופיות

1) ϕ
2) ϕ
3) $-\infty$
4) ϕ
5) $-\infty$
6) ∞
7) ∞
8) ϕ
9) 0
10) 1
11) ϕ

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

7) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

9) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

10) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

12) $\lim_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

14) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

16) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

17) $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

18) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

19) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

20) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

21) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

22) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

23) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

24) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) $-\infty$
4) 0
5) -5
6) 1
7) -1
8) -3
9) 1.5
10) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
11) $\frac{1}{4}$
12) 0
13) 4
14) $\frac{1}{9}$
15) 2
16) $\ln 3$
17) $e^{\frac{1}{3}}$
18) 0
19) אם $b\neq 0$: $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $a>0$, $b=0$: ∞. אם : $a<0$, $b=0$: $-\infty$.
20) 2.5
21) $\frac{k}{2}$
22) $\frac{1}{2}$
23) $-\frac{1}{2}$
24) $\frac{1}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

(היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$)

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ **2)** 1 **3)** e^2 **4)** e^{-1}

5) e^3 **6)** e^{-12} **7)** e^{30}

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את הגבול:

1) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

4) נתונה פונקציה $z:R\to R$, המקיימת $\lim_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:R\to R$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$, לכל x.

חשבו את הגבולות $\lim_{x\to 2}f(x),\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)$.

תשובות סופיות

1) 4 **2)** 1 **3)** 0

4) $\lim_{x\to 2}f(x)=16$, $\lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

חשבו את הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

1) $(a=1)\ ,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$

2) $(a=0)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

3) $(a=\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

4) $(a=-\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

5) א. $\lim_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

תשובות סופיות

1) ϕ **2)** ϕ **3)** 1 **4)** -1

5) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©