# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

## פרק 2 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים


1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה ..... 1
3. צמצום ..... 2
4. הכפלה בצמוד ..... 3
5. גבולות טריגונומטריים ..... 4
6. פונקציה שואפת לאינסוף ..... 7
7. איקס שואף לאינסוף ..... 8
8. הגבול של אוילר ..... 10
9. כלל הסנדויץ ..... 11
10. גבול של פונקציה מפוצלת ..... 13

# הצבה

## שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

## תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) $4$

3) $-\frac{1}{12}$

4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{4}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

**1)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

**2)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

**3)** $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

**4)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

**5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

**6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

**7)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

**8)** $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

**9)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

**10)** $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$

**11)** $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

**12)** $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

**13)** $\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

**14)** $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$

**15)** $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

**16)** $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

**17)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

**18)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$
2) $\frac{3}{4}$
3) $\frac{1}{2}$
4) $\frac{1}{2}$
5) $\frac{1}{2}$
6) $\frac{1}{2}$
7) $\frac{1}{8}$
8) $4$
9) $\frac{1}{4}$
10) $-\frac{1}{2}$
11) $\cos a$
12) $-\sin a$
13) $\frac{1}{\cos^2 a}$
14) $\frac{4}{10}$
15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{\pi}$
17) $1$
18) $\frac{-1}{12}$

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\begin{cases}\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\\ \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}\\ \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}\\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{cases}\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin \pi n=0\\ \cos \pi n=(-1)^n\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a\\ \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin a\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\dfrac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

## תשובות סופיות

1) $\phi$
2) $\phi$
3) $-\infty$
4) $\phi$
5) $-\infty$
6) $\infty$
7) $\infty$
8) $\phi$
9) $0$
10) $1$
11) $\phi$
12) $-\infty$
13) $-\infty$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# $x$ שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

**2)** $\lim_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

**3)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

**4)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

**5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

**6)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

**7)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**8)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**9)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

**10)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

**11)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

**12)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**13)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**14)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**15)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**16)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

**17)** $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

**18)** $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

**19)** $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

**20)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

**21)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

**22)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

**23)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

**24)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

**25)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

**26)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

**28)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^4}$

**29)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

## תשובות סופיות

**1)** 0 **2)** $-\dfrac{\pi}{2}$ **3)** 4 **4)** $-\infty$

**5)** 0 **6)** -5 **7)** 1 **8)** -1

**9)** -3 **10)** 1.5 **11)** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ **12)** $\dfrac{1}{4}$

**13)** 0 **14)** 4 **15)** $\dfrac{1}{9}$ **16)** 2

**17)** $\ln 3$ **18)** $e^{\frac{1}{3}}$ **19)** 0

**20)** אם $b\neq 0$: $\lim=\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}}$. אם $a>0$, $b=0$: $\infty$. אם: $a<0$, $b=0$: $-\infty$.

**21)** 2.5 **22)** $\dfrac{k}{2}$ **23)** $\dfrac{1}{2}$ **24)** $-\dfrac{1}{2}$

**25)** $\dfrac{1}{2}$ **26)** $\dfrac{a-b}{2}$ **27)** $\dfrac{3^4}{2^{10}}$ **28)** $\dfrac{5}{4}$

**29)** $\ln(6e)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הגבול של אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$):

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

## תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) $1$ 3) $e^2$ 4) $e^{-1}$ 5) $e^3$

6) $e$ 7) $e^{-12}$ 8) $e^{30}$ 9) $e$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-10**:

**1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

**2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos(2x+1)}{x}$

**3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

**5)** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**6)** $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

**7)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

**8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

**9)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}[x]$

**10)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}[x]$

**11)** נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $\lim\limits_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$, לכל $x$.

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to 2}f(x)\quad,\quad\lim_{x\to 2}\tan(z(x))\quad,\quad\lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\quad,\quad\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(z(x)\right)}{x}$$

**12)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

**13)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=0\Leftarrow\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=1\Leftarrow\lim\limits_{x\to c}f(x)=\pm 1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** 0 **2)** 0 **3)** $\frac{3}{4}$ **4)** 3 **5)** 0

**6)** 0 **7)** $\frac{3}{4}$ **8)** 4 **9)** 1 **10)** 0

**11)** $\lim_{x\to 2} f(x)=16$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(z(x)\right)}{x}=0$, $\lim_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$, $\lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

**12)** 0

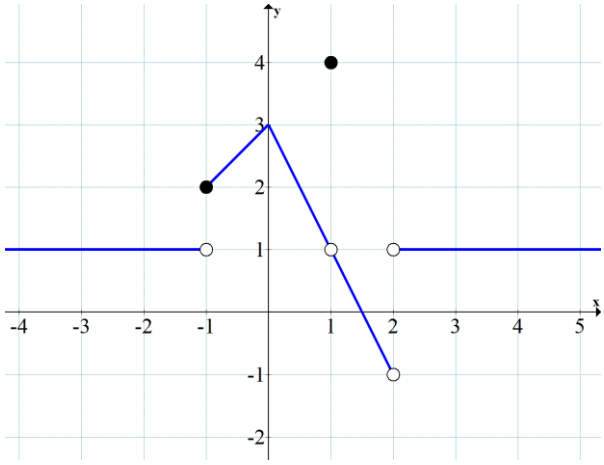
**13)** א. שאלת הוכחה. ב. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

**1)** להלן גרף של פונקציה:




חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. 1. $\lim_{x\to 1} f(x)$ 2. $\lim_{x\to 2} f(x)$ 3. $\lim_{x\to -1} f(x)$

ב. 1. $\lim_{x\to 1}\left(3f - f^2\right)$ 2. $\lim_{x\to -1}\left(3f - f^2\right)$

ג. 1. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{4-f}$ 2. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-f}$

**2)** נגדיר פונקציה $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ 1-x^2 & 0<x<2\\ 1.5x-6 & x\geq 2\end{cases}.$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x\to 2}\left[4\left(f(x)\right)^2+10f(x)\right]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נגדיר פונקציה $f(x)$ :

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ \cos x & 0<x<\pi\\ -0.5 & x\geq\pi\end{cases}.$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to\pi}\left[2\left(f(x)\right)^2+3f(x)\right]$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ של הפונקציות הבאות:

4) $$(a=0),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x} & x>0\\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$$

5) $$(a=1),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$$

6) $$(a=0),\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

7) $$(a=\infty),\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

8) $$(a=-\infty),\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

9) א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $1.\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ , $2.\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\nexists$ , $3.\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\nexists$

ב. $1.\ \lim\limits_{x\to 1}\left(3f-f^2\right)=2$ , $2.\ \lim\limits_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)=2$

ג. $1.\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{4-f(x)}=\dfrac{1}{3}$ , $2.\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-f(x)}=\nexists$

**2)** א. ראו בסרטון. ב. $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=1,\ \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=-3$ ג. 6

**3)** א. ראו בסרטון. ב. $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=1,\ \nexists \lim\limits_{x\to \pi} f\left(x\right)$ ג. $-1$

**4)** 4

**5)** $\phi$

**6)** $\phi$

**7)** 1

**8)** $-1$

**9)** א. אין גבול. ב. $\dfrac{1}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©