

רענון במתמטיקה מספר 500-5-0010

פרק 5 - גבול של סדרה

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות.
3. חישוב גבול לפי אוילר
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש.
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית.
7. חישוב גבול לפי ההגדרה.
8. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס.

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an + 1}{bn + 2}} \quad (14) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left(\frac{4}{n} \right) \quad (20) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (22) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (24) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n} \quad (23)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{* רמז לשאלה 24}$$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

- | | |
|---|------------------------|
| 4 (2) | 0 (1) |
| 0 (4) | ∞ (3) |
| 1 (6) | -5 (5) |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8) | 1.5 (7) |
| 4 (10) | 0.25 (9) |
| $\ln 3$ (12) | 2 (11) |
| | $e^{\frac{1}{3}}$ (13) |
| $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$ (14) | |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$ | |
| $\frac{k}{2}$ (16) | 2.5 (15) |
| 0.5 (18) | 0.5 (17) |
| 4 (20) | $\frac{a-b}{2}$ (19) |
| $\frac{1}{3}$ (22) | 0.5 (21) |
| 1 (24) | ∞ (23) |

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e \quad (8)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 10-1 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

רמז לשאלה 9: הוכיחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$א. a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \dots \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

(12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה: $a_n = \frac{6n + \sqrt{\lfloor x^2 n^2 \rfloor}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$.

$$(13) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

$$(14) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$$

(15) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k}\sqrt{n}}$

(16) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

(18) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

- 4 (1)
 0 (2)
 0 (3)
 0.75 (4)
 3 (5)
 $\frac{3}{4}$ (6)
 0 (7)
 16 (8)
 0 (9)
 1 (10)
 שאלת הוכחה. (11)
 שאלת הוכחה. (12)
 9 (13)
 1 (14)
 $\frac{1}{2}$ (15)
 $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ (16)
 1 (17)
 שאלת הוכחה. (18)

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{יהיו } a > 0 \text{ ו- } x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, לכל n .
 הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- \sqrt{a} .

$$(5) \quad \text{יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6)$, לכל n .

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3 < a < 3.5$.

$$(6) \quad \text{יהיו } 0 < b_1 < a_1$$

נגדיר $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, לכל n .

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

$$(7) \quad a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

$$(8) \quad \text{תהי סדרה המוגדרת על ידי } a_1 = 0.5 \text{ ו- } a_{n+1} = \sin(a_n^2) \text{ לכל } n \geq 1.$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא \sqrt{a} .

(5) א. אם $2 \leq a \leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

$$(7) \quad \text{ב.1. } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$$

(8) שאלת הוכחה.

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות 1-7 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

(9) נתון כי $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

הוכיחו לפי ההגדרה, כי:

$$\text{א. } (a_n + b_n) \rightarrow a + b$$

$$\text{ב. } (a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b$$

בשאלות 10-14 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכיחו שהסדרה $1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$ שואפת לאינסוף.

(16) הוכיחו שהסדרה $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ שואפת לאינסוף.

(17) הוכיחו שהסדרה $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

(18) הוכיחו או הפריכו:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
 בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
 וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
 בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
 וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.
 א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

$$\text{ב. הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

- (4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

$$\text{(5) חשבו את הגבול הבא } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: } a_1 = 2; a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$$

$$(7) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי } a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

$$(8) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי } a_1 = 0 \ (n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
 ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

$$(10) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(11) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(12) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(13) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$(14) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$$

מצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- (15) נתונה סדרה a_n , ונגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$. הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m, n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n .

א. a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:

$$1. a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L$$

ב. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n \rightarrow L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה a_n , $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$, הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$.

20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\liminf a_n = \limsup a_n$.

21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים

$$א. \lim(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

$$ב. \liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n .

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\lim(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23 יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.

$$\text{הוכיחו כי } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

24 תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$.

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

ב. הוכיחו שאם $L > 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) ,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

25 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n) ,

$$\text{המקיימות } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$.

הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0 \leq a_n, b_n \leq 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

26 תהי $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ו. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

יש מקסימום.

$$(27) \text{ תהי } (a_n) = (n - \sqrt{n} \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$$

- א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.
 ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של (a_n) .
 ג. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.
 ד. יהי ℓ מספר טבעי.
 הוכיחו שכמעט לכל n , מתקיים $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$.
 ה. יהי ℓ מספר טבעי.
 הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$.
 ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n) .
 ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?
 ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 ט. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

1. א. הסדרה שואפת לאינסוף.
 ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm \frac{1}{e}$.
 2. א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $-1, 0$.
 ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il