# קלקולוס 2

## פרק 15 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

### תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים ..... 1
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים ..... 4
3. נוסחאות – גבולות ..... 7

# גבול של פונקציה של שני משתנים

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

**1)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$

**2)** $\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$

**3)** $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$

**4)** $\lim_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$

**5)** $\lim_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$

**6)** $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$

**7)** $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

**8)** $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$

**9)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

**10)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

**11)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} |y|^x$

**12)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

**13)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x}{y}$

**14)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

**15)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

**16)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

**17)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0\\z\to 0}} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

**18)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

**19)** $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

**20)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**21)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

**22)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

**23)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

**24)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$

**25)** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

**26)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sin x+\cos y\right)=1$.

**28)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}x^2y=4$.

**29)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}}2x^2y=8$.

## תשובות סופיות

**1)** 1

**2)** $\frac{1}{12}$

**3)** 1

**4)** 0

**5)** אינסוף.

**6)** $\frac{1}{2}$

**7)** 2

**8)** 5

**9)** 0

**10) – 17)** אין לפונקציה גבול.

**18)** 0

**19)** 0

**20)** 0

**21)** 0

**22)** 3

**23)** 0

**24)** 0

**25)** 0

**26)** א-ד. 0

**27)** שאלת הוכחה.

**28)** שאלת הוכחה.

**29)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# רציפות של פונקציה של שני משתנים

## שאלות

בשאלות **3-1** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

**1)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**2)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**3)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **5-4** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

**4)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

**5)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

**6)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כאשר $m$ קבוע.

עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה פונקציה ממשית רציפה $f=f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\frac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

האם הפונקציה $g$ רציפה בנקודה $(0,0)$?

**8)** הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim_{x\to 0} f(x,y)=f(0,y)$ לכל $y$,

וגם $\lim_{y\to 0} f(x,y)=f(x,0)$ לכל $x$,

אז $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)$.

**9)** פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)|\le \sin^2\left(x^4+y^4\right)$, לכל $(x,y)$.

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

**10)** מה צריך להיות הערך של הקבוע $k$ (אם בכלל), על מנת שהפונקציה $f(x,y,z)\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ k & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

**11)** נתון כי:

לכל $x$ מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה $y$).

לכל $y$ מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\le|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה $x$).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

**12)** הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(14,1)>0,\ z(1,14)<0$.

אז בתחום ההגדרה של $z$ קיימת נקודה $(c_1,c_2)$, כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$ , הפונקציה תהיה רציפה.
**2)** הפונקציה רציפה.
**3)** הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
**4)** הפונקציה רציפה.
**5)** הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
**6)** עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
**7)** הפונקציה לא רציפה.
**8)** שאלת הוכחה.
**9)** שאלת הוכחה.
**10)** $k=0$
**11)** שאלת הוכחה.
**12)** שאלת הוכחה.

# נוסחאות – גבולות

| | $x \to -\infty$ | $x \to 0$ | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-\infty} = 0$ | $\frac{1}{0^+} = \infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty$ | $\frac{1}{\infty} = 0$ |
| $y = e^x$ | $e^{-\infty} = 0$ | $e^0 = 1$ | $e^{\infty} = \infty$ |
| $y = \ln x$ | $---$ | $\ln(0^+) = -\infty$ | $\ln(\infty) = \infty$ |
| $y = \arctan x$ | $\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ | $\text{atan}(0) = 0$ | $\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ |
| $y = a^x, a > 1$ | $a^{-\infty} = 0$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = \infty$ |
| $y = a^x, 0 < a < 1$ | $a^{-\infty} = \infty$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = 0$ |
| $y = \sin x$ | $---$ | $\sin 0 = 0$ | $---$ |
| $y = \cos x$ | $---$ | $\cos 0 = 1$ | $---$ |
| $y = \frac{\sin x}{x}$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $y = \frac{\tan x}{x}$ | $---$ | $1$ | $---$ |
| $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | $e$ | (from right) $1$ | $e$ |
| $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ | $---$ | $e$ | $1$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $---$ | $\sqrt{0^+} = 0$ | $\sqrt{\infty} = \infty$ |
| $y = \sqrt[3]{x}$ | $-\infty$ | $\sqrt[3]{0} = 0$ | $\sqrt[3]{\infty} = \infty$ |

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$ , $\infty(-\infty) = -\infty$ , $\infty + \infty = \infty$ , $\infty \pm a = \infty$ , $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$ , $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©