מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 25 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים 1
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים 4
3. נוסחאות – גבולות 7

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$

2) $\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$

3) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$

5) $\lim_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$

6) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$

7) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

8) $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$

9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y|^x$

12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$

14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(xy\right)}{x^2+y^2}$

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

19) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(xy\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$

25) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sin x+\cos y\right)=1$.

28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}x^2y=4$.

29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}}2x^2y=8$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{12}$

3) 1

4) 0

5) אינסוף.

6) $\frac{1}{2}$

7) 2

8) 5

9) 0

10) – 17) אין לפונקציה גבול.

18) 0

19) 0

20) 0

21) 0

22) 3

23) 0

24) 0

25) 0

26) א-ד. 0

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

1)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **4-5** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

4)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

5)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כאשר m קבוע.
עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f=f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\frac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim_{x\to 0} f(x,y)=f(0,y)$ לכל y,

וגם $\lim_{y\to 0} f(x,y)=f(x,0)$ לכל x,

אז $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)$.

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)|\le \sin^2\left(x^4+y^4\right)$, לכל (x,y).

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה $f(x,y,z)\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ k & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\le|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(14,1)>0,\ z(1,14)<0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1,c_2), כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.

תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^{\infty} = \infty$
$y = \ln x$	$---$	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^{\infty} = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^{\infty} = 0$
$y = \sin x$	$---$	$\sin 0 = 0$	$---$
$y = \cos x$	$---$	$\cos 0 = 1$	$---$
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	$---$	e	1
$y = \sqrt{x}$	$---$	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty(-\infty) = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \pm a = \infty$, $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$, $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©