אינפי 2

פרק 15 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים 1
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים 4
3. נוסחאות – גבולות 7

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **9-1**:

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(3,2)}\frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0^+)}(x^2+y)\ln(x^2+y)$$

5) $$\lim_{(x,y)\to(1^+,1^+)}\frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$$

6) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$$

7) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

8) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)}\frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$$

9) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

חשבו את הגבולות בשאלות 17-10:

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y|^x$

12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y}$

14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{2x^6+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות 25-18:

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

19) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$

25) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות 18, 23-20 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא ייתן בגוף השאלה.

27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sin x+\cos y\right)=1$.

28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x^2y=4$.

29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} 2x^2y=8$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{12}$

3) 1

4) 0

5) אינסוף.

6) $\frac{1}{2}$

7) 2

8) 5

9) 0

10) – 17) אין לפונקציה גבול.

18) 0

19) 0

20) 0

21) 0

22) 3

23) 0

24) 0

25) 0

26) א-ד. 0

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתתהיה רציפה בנקודה?

1)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **4-5** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

4)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

5)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כאשר m קבוע.
עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f=f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\frac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=f(0,y)$ לכל y,

וגם $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=f(x,0)$ לכל x,

אז $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=f(0,0)$.

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $\left|f(x,y)\right|\le\sin^2\left(x^4+y^4\right)$, לכל (x,y).

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ k & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\le|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(1,14)<0,\ \ z(14,1)>0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1,c_2), כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.

תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x\to-\infty$	$x\to 0$	$x\to\infty$
$y=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty}=0$	$\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$
$y=e^x$	$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^\infty=\infty$
$y=\ln x$	$---$	$\ln(0^+)=-\infty$	$\ln(\infty)=\infty$
$y=\arctan x$	$\text{atan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0)=0$	$\text{atan}(\infty)=\frac{\pi}{2}$
$y=a^x, a>1$ $y=a^x, 0<a<1$	$a^{-\infty}=0$ $a^{-\infty}=\infty$	$a^0=1$ $a^0=1$	$a^\infty=\infty$ $a^\infty=0$
$y=\sin x$	$---$	$\sin 0=0$	$---$
$y=\cos x$	$---$	$\cos 0=1$	$---$
$y=\frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y=\frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+}=0$ $\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt{\infty}=\infty$ $\sqrt[3]{\infty}=\infty$

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty(-\infty)=-\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\pm a=\infty$, $\infty\cdot(\pm a)=\pm\infty$, $\infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$