

# שיטות יישומיות במשוואות דיפרנציאליות ואינטגרליות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל ..... 1
2. טורי קוסינוסים וסינוסים ..... (ללא ספר)

## בעיות שטורם-ליוביל

## שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$. (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

א.  $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$  (משוואת הרמיט)

ב.  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$  (משוואת בסל)

(2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
 ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה  $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$ .

2. מה סכום הטור ב- $x=0$ ?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$ ?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה  $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$ .

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.  
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את  $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$ , לטור פונקציות עצמיות.

- הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור  $x=1$  שונים.  
 ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור  $x = \sqrt{e}$ ,  $x = 1.5$ ,  $x = 2$ .

**זהויות שכדאי להכיר:**

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi n) = 0$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left( \lambda \left( -\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ערכים עצמיים:  $\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$ ; בנוסף,  $\lambda = -1$  הוא עייע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית  $\varphi(x) = e^x$ .

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות: } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

בנוסף,  $\lambda_0 = 0$  הוא עייע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית  $\varphi(x) = x - 1$ .

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ב. סכום הטור ב- $x=0$  הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$ .

$$\text{ג. כאשר } (0 < x < 2), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. כאשר } 0 < x < \pi, \quad e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

11 א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד.  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$

ה. סכום הטור ב-  $x = \sqrt{e}$  הוא  $\frac{1}{2}$ ; ב-  $x = 1.5$  הוא 1; וב-  $x = 2$  הוא 0.