חשבון אינפיניטסימלי (1)

פרק 15 - בעיות קצב שינוי

תוכן העניינים

1. בעיות קצב שינוי 1

בעיות קצב שינוי

שאלות

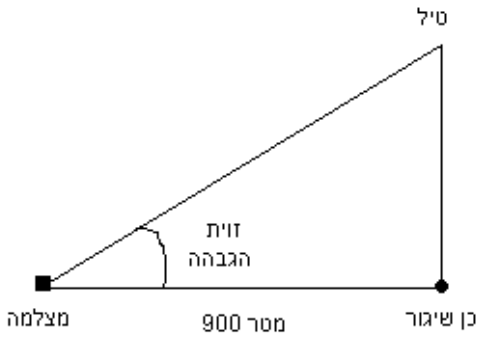
1) נפט דולף ממכלית ומתפשט בצורת כתם מעגלי.
רדיוס הכתם גדל בקצב קבוע של 0.5 מ' לשנייה.
באיזה קצב גדל שטח הכתם כאשר הרדיוס הוא 20 מ'?

2) סולם באורך 2.5 מ', השעון על קיר אנכי מחליק באופן כזה, שברגע שרגליו נמצאות במרחק 2 מ' מהקיר הן מתרחקות ממנו בקצב של 1 מטר לשנייה.
באיזה מהירות יורד ראש הסולם לאורך הקיר ברגע זה?

3) מצלמה מוצבת במרחק 900 מ' מכן לשיגור טילים (ראה איור).
הטיל נוסק אנכית במהירות של 260 מ' לשנייה בהיותו בגובה של 1,200 מ'.

א. באיזו מהירות צריכה זווית ההגבהה של המצלמה להשתנות אז, כדי להמשיך לקלוט את דמות הטיל ?

ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המצלמה לטיל?



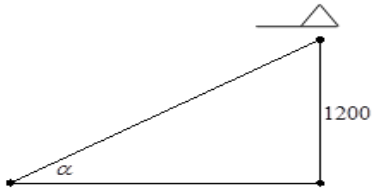
4) מסננת בצורת חרוט משמשת לטיהור נוזל ממשקעים.
גובה החרוט 40 ס"מ ורדיוס הבסיס שלו 10 ס"מ.
כאשר גובה פני הנוזל בחרוט 20 ס"מ, הנוזל זורם מן החרוט בקצב של 30 סמ"ק לדקה.
באיזה מהירות קטן גובה פני הנוזל בחרוט באותו רגע?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) מטוס טס אופקית בגובה קבוע של 1,200 מטר מעל לנקודת תצפית קבועה.
ברגע מסוים המטוס נצפה בזווית של $\alpha = 30^\circ$.
ברגע זה הזווית קטנה, ומהירות המטוס היא 480 ק"מ לשעה.

א. באיזה קצב קטנה α באותו רגע? בטאו את התוצאה במעלות לשנייה.

ב. באיזה קצב משתנה אז המרחק בין המטוס לנקודת התצפית?
בטאו את התוצאה במטרים לשנייה.



6) למוישל'ה בלון בצורת כדור המלא באוויר.
מוישל'ה משחרר את האוויר מהבלון בקצב קבוע של 2 סמ"ק בשנייה.
באיזה קצב קטן שטח פני הבלון כאשר רדיוסו הוא 3 ס"מ?

7) נתון חרוט שרדיוס בסיסו וגובהו שווים ל-3 ס"מ.
פותחים ברז ומים זורמים לחרוט בקצב קבוע של L סמ"ק לשנייה.

א. הוכיחו כי לאחר $\frac{9\pi}{L}$ שניות החרוט יהיה מלא מים.

הערה: שאלה זו דורשת יכולת פתרון מד"ר בהפרדת משתנים.

ב. נסמן ב-$h(t)$ את גובה פני החרוט בזמן t.
מהו קצב עליית המים בחרוט, כאשר $h(t) = 1.5$ ס"מ?

8) חלקיק נע לאורך עקומה שמשוואתה היא $\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$.
נתון ששיעור ה-x של החלקיק גדל בקצב של 6 יחידות לשנייה,
ברגע שבו החלקיק נמצא בנקודה $(1,2)$.

א. באיזה קצב משתנה אז שיעור ה-y של החלקיק?

ב. האם החלקיק עולה או יורד באותו רגע?

9) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.

הערה: שאלה זו דורשת יכולת פתרון מד"ר בהפרדת משתנים.

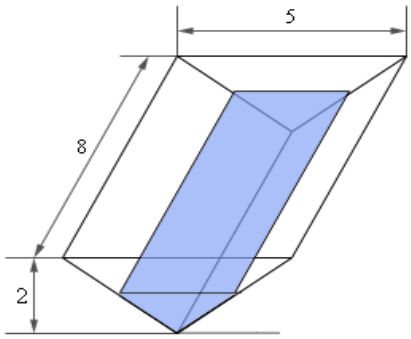
א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t.

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) מבלון מלא אוויר שרדיוסו R מתחיל לצאת אוויר.
קצב יציאת האוויר הוא $-3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t.
הוכיחו כי לאחר $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לשמינית מערכו ההתחלתי.
הערה: שאלה זו דורשת יכולת פתרון מד"ר בהפרדת משתנים.

11) נתונה שוקת מים שעומקה 8 מטרים וצורתה מנסרה משולשת,
שבסיסיה הם משולשים שווי שוקיים שבסיסם 5 מ' וגובהם 2 מ' (ראו ציור).
אם מים מוזרמים לשוקת בקצב קבוע של 6 מטרים מעוקבים לשנייה,
באיזה קצב משתנה גובה המים כאשר גובהם 120 סנטימטרים?

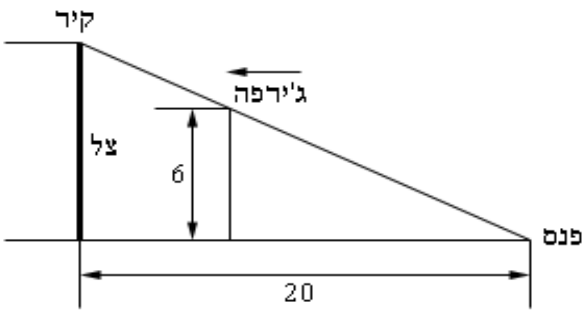


12) פנס נמצא בראש עמוד שגובהו 12 מטר.
ג'ירפה, שגובהה 5.5 מטרים, מתרחקת מהעמוד בקצב של 2 מטרים בשנייה.

א. באיזה קצב מתרחק קצה הצל של הג'ירפה מהעמוד,
כאשר היא 25 מ' מהעמוד?

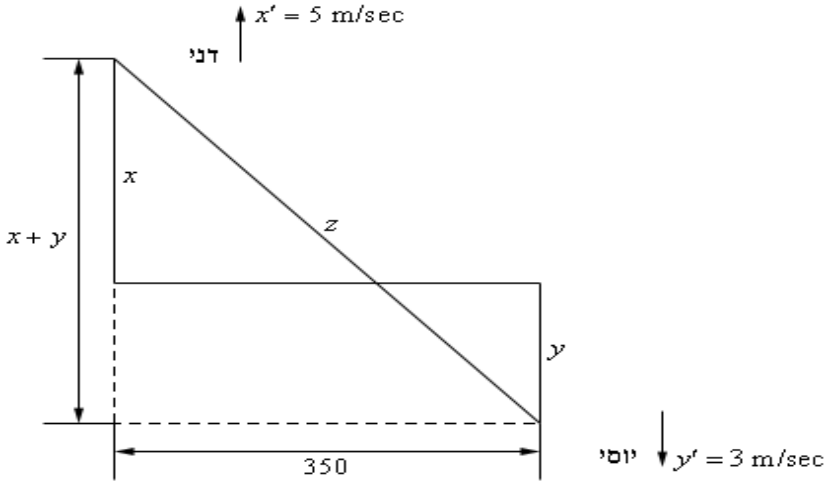
ב. באיזה קצב מתרחק קצה הצל של הג'ירפה מהג'ירפה,
כאשר היא 25 מ' מהעמוד?

13) פנס מונח על הקרקע 20 מטרים מקיר.
ג'ירפה, שגובהה 6 מטרים, הולכת לכיוון הקיר בקצב של 2.5 מטרים לשנייה.
באיזה מהירות משתנה גובהו של הצל, כאשר הג'ירפה במרחק של 8 מטרים
מהקיר? האם גובה הצל קטן או גדל באותו הזמן?



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) דני ויוסי גרים במרחק של 350 מטרים האחד מהשני.
דני יוצא מביתו ורוכב על אופניו צפונה במהירות של 5 מטרים לשנייה.
7 דקות אחר כך יוצא יוסי מביתו ורוכב על אופניו דרומה במהירות של 3 מטרים לשנייה.
באיזה קצב משתנה המרחק בין דני ויוסי 25 דקות לאחר שדני יצא את ביתו?
תוכלו להיעזר באיור הבא:



15) נניח שיש לנו שני נגדים המחוברים במקביל עם התנגדות R_1 ו- R_2,
הנמדדת באוהם (Ω). ההתנגדות הכוללת R נתונה על ידי $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.
נניח ש-R_1 גדל בקצב של 0.4 אוהם בדקה ו- R_2 קטן בקצב של 0.7 אוהם בדקה.
באיזה קצב משתנה R, כאשר $R_2=105\Omega$, $R_1=80\Omega$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $20\pi\ m^2/\sec$

2) $-\frac{4}{3}\ m/\sec$

3) א. $0.104\ rad/\sec$ ב. $208\ m/\sec$

4) $-0.38\ cm/\min$

5) א. $100_{Rad/hour}$ או $-\frac{5}{\pi}$ מעלות בשנייה. ב. $115.4\ m/\sec$

6) $\frac{3}{4}$ סמ"ר לשנייה.

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{4L}{9\pi}$

8) א. $-\frac{60}{7}$ יחידות לשנייה. ב. יורד

9) א. $R(t)=\frac{12}{2t+3}$ ב. $t=4.5_{hours}$

10) שאלת הוכחה.

11) $0.25_{m/\sec}$

12) א. $3.6923\ m/\sec$ ב. $1.6923\ m/\sec$

13) $2.0833 m/\sec$

14) $7.9958_{m/\sec}$

15) קטן בקצב של $0.002045\Omega/\min$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©