סטטיסטיקה והסתברות

פרק 47 - בדיקת השערות על שונויות

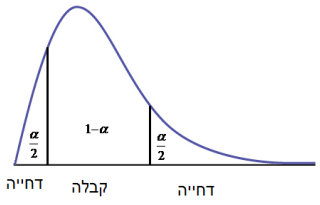
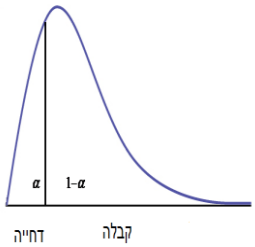
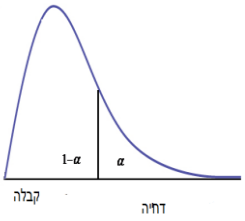
תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן 1

בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן:

רקע:

בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה:

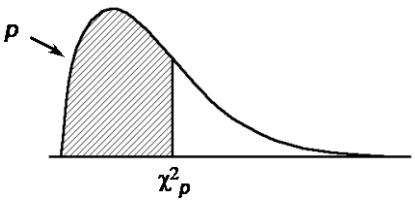
השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$
תנאים:	$X\sim N$		
נדחה את השערת האפס אם:	 $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}$ או $\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$	 $\chi^2<\chi^{2(n-1)}_{\alpha}$	 $\chi^2>\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha}$

סטטיסטי המבחן: $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

התפלגות חי בריבוע:

אם $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, והפרמטר μ אינו ידוע, מתקיים ש: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^{2(n-1)}$.

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית
המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.
התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.
אם μ אינו ידוע, אז: $d.f=n-1$.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם $\sigma=15$.
מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

במדגם של 20 ישראלים התקבל: $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=3420$.

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

<u>האוכלוסייה</u>: נבחנים ישראלים במבחן I.Q

<u>המשתנה</u>: X = ציון I.Q

<u>פרמטר</u>: σ^2

<u>השערות</u>: $H_0:\sigma^2=15^2=225$
$H_1:\sigma^2\neq 225$

<u>הנחה</u>: $X\sim N$

<u>כלל הכרעה</u>: $d.f=n-1=20-1=19$

נדחה את H_0 אם $X^2>32.9$ או $X^2<8.91$

<u>תוצאות המדגם</u>: $n=20$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2=3420$$

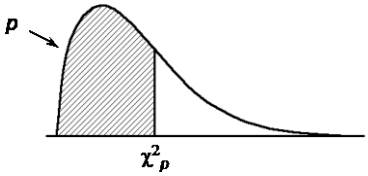
$$S^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{3420}{20-1}=180$$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{19\cdot 180}{225}=15.2$$

<u>מסקנה</u>: לא נדחה את H_0, לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q שונה מזו של אמריקאים. ($\alpha=5\%$)

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$



df	p .005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם):
997, 996, 1005, 1024, 1008.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 38, 50, 72, 90, 110.

א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?

ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?

ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

4) השערות המחקר הן: $H_o:\sigma^2=100 \quad H_1:\sigma^2>100$
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.

א. מה תהיה עוצמת המבחן אם $\sigma_1^2=150$?

ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

5) השערות המחקר הן: $H_o:\sigma=2$, $H_1:\sigma<2$.
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.
תנו הערכה למובהקות התוצאה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) לא נדחה H_o.

2) א. נדחה את H_o. ב. לא תשתנה. ג. לא ניתן לדעת.
ד. לא תשתנה.

3) א. נדחה את H_o. ב. לא נדחה את H_o.

4) א. בין 25% ל-50%. ב. 405.3.

5) $0 < P_v < 0.005$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל