

# סטטיסטיקה וישומיה

פרק 21 - בדיקת השערות על שונויות

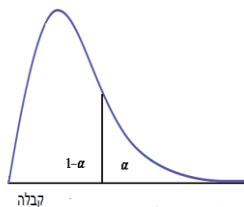
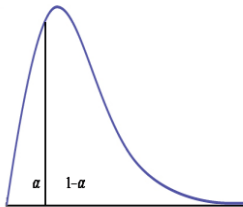
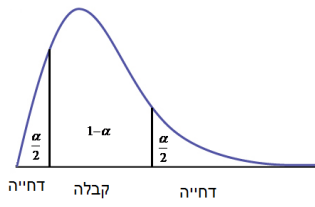
תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן ..... 1
2. בדיקת השערות על שתי שונויות ..... 6

## בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן:

רקע:

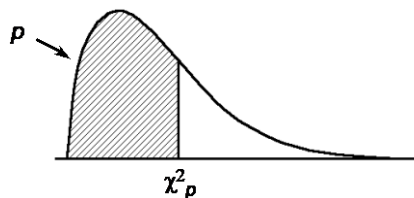
בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה:

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית: | $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$<br>$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$                                                                                 | $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$<br>$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$                                                                               | $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$<br>$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$                                                                                                                                                         |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים:                           | $X \sim N$                                                                                                                                   |                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                         |
| נדחה את השערת האפס אם:           |  <p>קבלה<br/>דחייה</p> $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}$ |  <p>דחייה<br/>קבלה</p> $\chi^2 < \chi_{\alpha}^{2(n-1)}$ |  <p>דחייה<br/>קבלה<br/>דחייה</p> $\chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)} \text{ או } \chi^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$ |

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

התפלגות חי בריבוע:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)} \quad \text{אם } X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ והפרמטר } \mu \text{ אינו ידוע, מתקיים ש:}$$



התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.

התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם  $\mu$  אינו ידוע, אז:  $d.f = n - 1$ .

**דוגמה:**

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 15$ . מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3420 \quad \text{במדגם של 20 ישראלים התקבל:}$$

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

האוכלוסייה: נבחנים ישראלים במבחן I.Q.

המשתנה:  $X =$  ציון I.Q.

פרמטר:  $\sigma^2$

$$H_0: \sigma^2 = 15^2 = 225$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 225$$

השערות:

הנחה:  $X \sim N$

$$d.f = n - 1 = 20 - 1 = 19 \quad \text{כלל הכרעה:}$$

נדחה את  $H_0$  אם  $X^2 > 32.9$  או  $X^2 < 8.91$

תוצאות המדגם:  $n = 20$

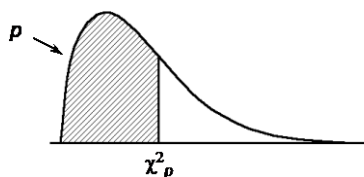
$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

מסקנה: לא נדחה את  $H_0$ , לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q.

שונה מזו של אמריקאים. ( $\alpha = 5\%$ )

**טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$** 


| df | $p$      |         |         |         |        |       |       |      |      |      |      |      |      |
|----|----------|---------|---------|---------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
|    | .005     | .01     | .025    | .05     | .10    | .25   | .50   | .75  | .90  | .95  | .975 | .99  | .995 |
| 1  | 0.004393 | 0.00157 | 0.00982 | 0.02393 | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2  | 0.0100   | 0.0201  | 0.0506  | 0.103   | 0.211  | 0.575 | 1.39  | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3  | 0.0717   | 0.115   | 0.216   | 0.352   | 0.584  | 1.21  | 2.37  | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4  | 0.207    | 0.297   | 0.484   | 0.711   | 1.06   | 1.92  | 3.36  | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5  | 0.412    | 0.554   | 0.831   | 1.15    | 1.61   | 2.67  | 4.35  | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6  | 0.676    | 0.872   | 1.24    | 1.64    | 2.20   | 3.45  | 5.35  | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7  | 0.989    | 1.24    | 1.69    | 2.17    | 2.83   | 4.25  | 6.35  | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8  | 1.34     | 1.65    | 2.18    | 2.73    | 3.49   | 5.07  | 7.34  | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9  | 1.73     | 2.09    | 2.70    | 3.33    | 4.17   | 5.90  | 8.34  | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16     | 2.56    | 3.25    | 3.94    | 4.87   | 6.74  | 9.34  | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60     | 3.05    | 3.82    | 4.57    | 5.58   | 7.58  | 10.3  | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07     | 3.57    | 4.40    | 5.23    | 6.30   | 8.44  | 11.3  | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57     | 4.11    | 5.01    | 5.89    | 7.04   | 9.30  | 12.3  | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07     | 4.66    | 5.63    | 6.57    | 7.79   | 10.2  | 13.3  | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60     | 5.23    | 6.26    | 7.26    | 8.55   | 11.0  | 14.3  | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14     | 5.81    | 6.91    | 7.96    | 9.31   | 11.9  | 15.3  | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70     | 6.41    | 7.56    | 8.67    | 10.1   | 12.8  | 16.3  | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26     | 7.01    | 8.23    | 9.39    | 10.9   | 13.7  | 17.3  | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84     | 7.63    | 8.91    | 10.1    | 11.7   | 14.6  | 18.3  | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43     | 8.26    | 9.59    | 10.9    | 12.4   | 15.5  | 19.3  | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03     | 8.90    | 10.3    | 11.6    | 13.2   | 16.3  | 20.3  | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64     | 9.54    | 11.0    | 12.3    | 14.0   | 17.2  | 21.3  | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26     | 10.2    | 11.7    | 13.1    | 14.8   | 18.1  | 22.3  | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89     | 10.9    | 12.4    | 13.8    | 15.7   | 19.0  | 23.3  | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5     | 11.5    | 13.1    | 14.6    | 16.5   | 19.9  | 24.3  | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2     | 12.2    | 13.8    | 15.4    | 17.3   | 20.8  | 25.3  | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8     | 12.9    | 14.6    | 16.2    | 18.1   | 21.7  | 26.3  | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5     | 13.6    | 15.3    | 16.9    | 18.9   | 22.7  | 27.3  | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1     | 14.3    | 16.0    | 17.7    | 19.8   | 23.6  | 28.3  | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8     | 15.0    | 16.8    | 18.5    | 20.6   | 24.5  | 29.3  | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |

## שאלות:

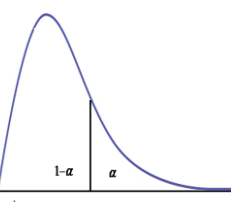
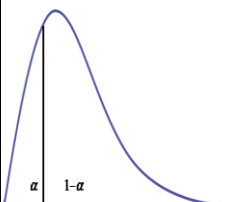
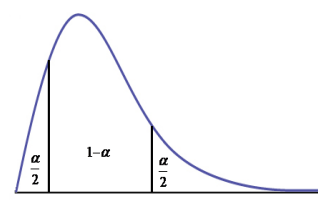
- (1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכוונת האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארוז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).  
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם):  
1008, 1024, 1005, 996, 997.  
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- (2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 110, 90, 72, 50, 38.  
א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?  
ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?  
ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?  
ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?
- (3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.  
א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.  
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.
- (4) השערות המחקר הן:  $H_1: \sigma^2 > 100$   $H_0: \sigma^2 = 100$   
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.  
א. מה תהיה עוצמת המבחן אם  $\sigma_1^2 = 150$ ?  
ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?
- (5) השערות המחקר הן:  $H_1: \sigma < 2$ ,  $H_0: \sigma = 2$ .  
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.  
תנו הערכה למובהקות התוצאה.

### תשובות סופיות:

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) א. נדחה את  $H_0$ .  
ב. לא תשתנה.  
ג. לא ניתן לדעת.  
ד. לא תשתנה.
- (3) א. נדחה את  $H_0$ .  
ב. לא נדחה את  $H_0$ .
- (4) א. בין 25% ל-50%.  
ב. 405.3.
- (5)  $0 < P_V < 0.005$ .

## בדיקת השערות על שתי שוניות:

רקע:

| השערת האפס : השערה אלטרנטיבית : | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$<br>$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$                                       | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$<br>$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$                                                 | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$<br>$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$                                                                                             |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים :                         | 1. מדגמים בלתי תלויים<br>2. $X_1, X_2 \sim N$                                                                                |                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                       |
| נדחה את השערת האפס אם :         | <br>$F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}$ | <br>$F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$ | <br>$F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1, n_2-1)}$<br>$F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1, n_1-1)}}$ |

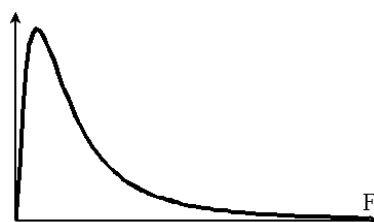
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ סטטיסטי המבחן}$$

התפלגות F:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1) \text{ אם } X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2) \text{ ו- } X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2) \text{ אזי}$$

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

$$\text{כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה : } F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2-1, n_1-1)}$$



$$df_1 = n_1 - 1$$

$$df_2 = n_2 - 1$$

**דוגמה:**

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמן ביצוע המשימה:  $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$ .

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:  $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$ . בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונות? מה יש להניח?

**פתרון:**

האוכלוסיות: נשים מול גברים.

משתנה:  $y =$  זמן ביצוע משימה של גבר,  $x =$  זמן ביצוע משימה של אישה

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} : \text{פרמטר}$$

$$H_0 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1$$

השערות:

$$H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq 1$$

הנחות: 1. מדגימים ב"ת 2.  $x, y \sim N$

כלל הכרעה:

$$\alpha = 2\%$$

$$n_1 = 13, d.f_1 = n_1 - 1 = 12$$

$$n_2 = 10, d.f_2 = n_2 - 1 = 9$$

נדחה את  $H_0$  אם  $F > 5.11$  או  $F < 0.23$

$$S_y^2 = \frac{204}{10-1} = 22\frac{2}{3} : \text{תוצאות המדגם}$$

$$S_x^2 = \frac{200}{13-1} = 16\frac{2}{3}$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{16\frac{2}{3}}{22\frac{2}{3}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

מסקנה: ברמת מובהקות של 2% נקבל את  $H_0$ .

לא קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים מבחינת השונות שלהם.



| טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| α= 0.05                          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ד"ח מנהל"ח מנבה                  | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 12     | 16     | 20     | 24     | 60     | 120    | ∞      |
| 1                                | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 | 241.88 | 243.91 | 246.46 | 248.01 | 249.05 | 252.20 | 253.25 | 254.31 |
| 2                                | 18.51  | 19.00  | 19.16  | 19.25  | 19.30  | 19.33  | 19.35  | 19.37  | 19.38  | 19.40  | 19.41  | 19.43  | 19.45  | 19.45  | 19.48  | 19.49  | 19.50  |
| 3                                | 10.13  | 9.55   | 9.28   | 9.12   | 9.01   | 8.94   | 8.89   | 8.85   | 8.81   | 8.79   | 8.74   | 8.69   | 8.66   | 8.64   | 8.57   | 8.55   | 8.53   |
| 4                                | 7.71   | 6.94   | 6.59   | 6.39   | 6.26   | 6.16   | 6.09   | 6.04   | 6.00   | 5.96   | 5.91   | 5.84   | 5.80   | 5.77   | 5.69   | 5.66   | 5.63   |
| 5                                | 6.61   | 5.79   | 5.41   | 5.19   | 5.05   | 4.95   | 4.88   | 4.82   | 4.77   | 4.74   | 4.68   | 4.60   | 4.56   | 4.53   | 4.43   | 4.40   | 4.37   |
| 6                                | 5.99   | 5.14   | 4.76   | 4.53   | 4.39   | 4.28   | 4.21   | 4.15   | 4.10   | 4.06   | 4.00   | 3.92   | 3.87   | 3.84   | 3.74   | 3.70   | 3.67   |
| 7                                | 5.59   | 4.74   | 4.35   | 4.12   | 3.97   | 3.87   | 3.79   | 3.73   | 3.68   | 3.64   | 3.57   | 3.49   | 3.44   | 3.41   | 3.30   | 3.27   | 3.23   |
| 8                                | 5.32   | 4.46   | 4.07   | 3.84   | 3.69   | 3.58   | 3.50   | 3.44   | 3.39   | 3.35   | 3.28   | 3.20   | 3.15   | 3.12   | 3.01   | 2.97   | 2.93   |
| 9                                | 5.12   | 4.26   | 3.86   | 3.63   | 3.48   | 3.37   | 3.29   | 3.23   | 3.18   | 3.14   | 3.07   | 2.99   | 2.94   | 2.90   | 2.79   | 2.75   | 2.71   |
| 10                               | 4.96   | 4.10   | 3.71   | 3.48   | 3.33   | 3.22   | 3.14   | 3.07   | 3.02   | 2.98   | 2.91   | 2.83   | 2.77   | 2.74   | 2.62   | 2.58   | 2.54   |
| 11                               | 4.84   | 3.98   | 3.59   | 3.36   | 3.20   | 3.09   | 3.01   | 2.95   | 2.90   | 2.85   | 2.79   | 2.70   | 2.65   | 2.61   | 2.49   | 2.45   | 2.40   |
| 12                               | 4.75   | 3.89   | 3.49   | 3.26   | 3.11   | 3.00   | 2.91   | 2.85   | 2.80   | 2.75   | 2.69   | 2.60   | 2.54   | 2.51   | 2.38   | 2.34   | 2.30   |
| 13                               | 4.67   | 3.81   | 3.41   | 3.18   | 3.03   | 2.92   | 2.83   | 2.77   | 2.71   | 2.67   | 2.60   | 2.51   | 2.46   | 2.42   | 2.30   | 2.25   | 2.21   |
| 14                               | 4.60   | 3.74   | 3.34   | 3.11   | 2.96   | 2.85   | 2.76   | 2.70   | 2.65   | 2.60   | 2.53   | 2.44   | 2.39   | 2.35   | 2.22   | 2.18   | 2.13   |
| 15                               | 4.54   | 3.68   | 3.29   | 3.06   | 2.90   | 2.79   | 2.71   | 2.64   | 2.59   | 2.54   | 2.48   | 2.38   | 2.33   | 2.29   | 2.16   | 2.11   | 2.07   |
| 16                               | 4.49   | 3.63   | 3.24   | 3.01   | 2.85   | 2.74   | 2.66   | 2.59   | 2.54   | 2.49   | 2.42   | 2.33   | 2.28   | 2.24   | 2.11   | 2.06   | 2.01   |
| 17                               | 4.45   | 3.59   | 3.20   | 2.96   | 2.81   | 2.70   | 2.61   | 2.55   | 2.49   | 2.45   | 2.38   | 2.29   | 2.23   | 2.19   | 2.06   | 2.01   | 1.96   |
| 18                               | 4.41   | 3.55   | 3.16   | 2.93   | 2.77   | 2.66   | 2.58   | 2.51   | 2.46   | 2.41   | 2.34   | 2.25   | 2.19   | 2.15   | 2.02   | 1.97   | 1.92   |
| 19                               | 4.38   | 3.52   | 3.13   | 2.90   | 2.74   | 2.63   | 2.54   | 2.48   | 2.42   | 2.38   | 2.31   | 2.21   | 2.16   | 2.11   | 1.98   | 1.93   | 1.88   |
| 20                               | 4.35   | 3.49   | 3.10   | 2.87   | 2.71   | 2.60   | 2.51   | 2.45   | 2.39   | 2.35   | 2.28   | 2.18   | 2.12   | 2.08   | 1.95   | 1.90   | 1.84   |
| 21                               | 4.32   | 3.47   | 3.07   | 2.84   | 2.68   | 2.57   | 2.49   | 2.42   | 2.37   | 2.32   | 2.25   | 2.16   | 2.10   | 2.05   | 1.92   | 1.87   | 1.81   |
| 22                               | 4.30   | 3.44   | 3.05   | 2.82   | 2.66   | 2.55   | 2.46   | 2.40   | 2.34   | 2.30   | 2.23   | 2.13   | 2.07   | 2.03   | 1.89   | 1.84   | 1.78   |
| 23                               | 4.28   | 3.42   | 3.03   | 2.80   | 2.64   | 2.53   | 2.44   | 2.37   | 2.32   | 2.27   | 2.20   | 2.11   | 2.05   | 2.01   | 1.86   | 1.81   | 1.76   |
| 24                               | 4.26   | 3.40   | 3.01   | 2.78   | 2.62   | 2.51   | 2.42   | 2.36   | 2.30   | 2.25   | 2.18   | 2.09   | 2.03   | 1.98   | 1.84   | 1.79   | 1.73   |
| 25                               | 4.24   | 3.39   | 2.99   | 2.76   | 2.60   | 2.49   | 2.40   | 2.34   | 2.28   | 2.24   | 2.16   | 2.07   | 2.01   | 1.96   | 1.82   | 1.77   | 1.71   |
| 26                               | 4.23   | 3.37   | 2.98   | 2.74   | 2.59   | 2.47   | 2.39   | 2.32   | 2.27   | 2.22   | 2.15   | 2.05   | 1.99   | 1.95   | 1.80   | 1.75   | 1.69   |
| 27                               | 4.21   | 3.35   | 2.96   | 2.73   | 2.57   | 2.46   | 2.37   | 2.31   | 2.25   | 2.20   | 2.13   | 2.04   | 1.97   | 1.93   | 1.79   | 1.73   | 1.67   |
| 28                               | 4.20   | 3.34   | 2.95   | 2.71   | 2.56   | 2.45   | 2.36   | 2.29   | 2.24   | 2.19   | 2.12   | 2.02   | 1.96   | 1.91   | 1.77   | 1.71   | 1.65   |
| 29                               | 4.18   | 3.33   | 2.93   | 2.70   | 2.55   | 2.43   | 2.35   | 2.28   | 2.22   | 2.18   | 2.10   | 2.01   | 1.94   | 1.90   | 1.75   | 1.70   | 1.64   |
| 30                               | 4.17   | 3.32   | 2.92   | 2.69   | 2.53   | 2.42   | 2.33   | 2.27   | 2.21   | 2.16   | 2.09   | 1.99   | 1.93   | 1.89   | 1.74   | 1.68   | 1.62   |
| 40                               | 4.08   | 3.23   | 2.84   | 2.61   | 2.45   | 2.34   | 2.25   | 2.18   | 2.12   | 2.08   | 2.00   | 1.90   | 1.84   | 1.79   | 1.64   | 1.58   | 1.51   |
| 50                               | 4.03   | 3.18   | 2.79   | 2.56   | 2.40   | 2.29   | 2.20   | 2.13   | 2.07   | 2.03   | 1.95   | 1.85   | 1.78   | 1.74   | 1.58   | 1.51   | 1.44   |
| 60                               | 4.00   | 3.15   | 2.76   | 2.53   | 2.37   | 2.25   | 2.17   | 2.10   | 2.04   | 1.99   | 1.92   | 1.82   | 1.75   | 1.70   | 1.53   | 1.47   | 1.39   |
| 90                               | 3.95   | 3.10   | 2.71   | 2.47   | 2.32   | 2.20   | 2.11   | 2.04   | 1.99   | 1.94   | 1.86   | 1.76   | 1.69   | 1.64   | 1.46   | 1.39   | 1.30   |
| 120                              | 3.92   | 3.07   | 2.68   | 2.45   | 2.29   | 2.18   | 2.09   | 2.02   | 1.96   | 1.91   | 1.83   | 1.73   | 1.66   | 1.61   | 1.43   | 1.35   | 1.25   |
| ∞                                | 3.84   | 3.00   | 2.60   | 2.37   | 2.21   | 2.10   | 2.01   | 1.94   | 1.88   | 1.83   | 1.75   | 1.64   | 1.57   | 1.52   | 1.32   | 1.22   | 1.00   |

| טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F $\alpha = 0.01$ ראה איור מטה. |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |          |
|----------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| ד"ח מונה/ד"ח מכנה                                              | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 12      | 16      | 20      | 24      | 60      | 120     | $\infty$ |
| 1                                                              | 4052.18 | 4999.50 | 5403.35 | 5624.58 | 5763.65 | 5858.99 | 5928.36 | 5981.07 | 6022.47 | 6055.85 | 6106.32 | 6170.10 | 6208.73 | 6234.63 | 6313.03 | 6339.39 | 6365.86  |
| 2                                                              | 98.50   | 99.00   | 99.17   | 99.25   | 99.30   | 99.33   | 99.36   | 99.37   | 99.39   | 99.40   | 99.42   | 99.44   | 99.45   | 99.46   | 99.48   | 99.49   | 99.50    |
| 3                                                              | 34.12   | 30.82   | 29.46   | 28.71   | 28.24   | 27.91   | 27.67   | 27.49   | 27.35   | 27.23   | 27.05   | 26.83   | 26.69   | 26.60   | 26.32   | 26.22   | 26.13    |
| 4                                                              | 21.20   | 18.00   | 16.69   | 15.98   | 15.52   | 15.21   | 14.98   | 14.80   | 14.66   | 14.55   | 14.37   | 14.15   | 14.02   | 13.93   | 13.65   | 13.56   | 13.46    |
| 5                                                              | 16.26   | 13.27   | 12.06   | 11.39   | 10.97   | 10.67   | 10.46   | 10.29   | 10.16   | 10.05   | 9.89    | 9.68    | 9.55    | 9.47    | 9.20    | 9.11    | 9.02     |
| 6                                                              | 13.75   | 10.92   | 9.78    | 9.15    | 8.75    | 8.47    | 8.26    | 8.10    | 7.98    | 7.87    | 7.72    | 7.52    | 7.40    | 7.31    | 7.06    | 6.97    | 6.88     |
| 7                                                              | 12.25   | 9.55    | 8.45    | 7.85    | 7.46    | 7.19    | 6.99    | 6.84    | 6.72    | 6.62    | 6.47    | 6.28    | 6.16    | 6.07    | 5.82    | 5.74    | 5.65     |
| 8                                                              | 11.26   | 8.65    | 7.59    | 7.01    | 6.63    | 6.37    | 6.18    | 6.03    | 5.91    | 5.81    | 5.67    | 5.48    | 5.36    | 5.28    | 5.03    | 4.95    | 4.86     |
| 9                                                              | 10.56   | 8.02    | 6.99    | 6.42    | 6.06    | 5.80    | 5.61    | 5.47    | 5.35    | 5.26    | 5.11    | 4.92    | 4.81    | 4.73    | 4.48    | 4.40    | 4.31     |
| 10                                                             | 10.04   | 7.56    | 6.55    | 5.99    | 5.64    | 5.39    | 5.20    | 5.06    | 4.94    | 4.85    | 4.71    | 4.52    | 4.41    | 4.33    | 4.08    | 4.00    | 3.91     |
| 11                                                             | 9.65    | 7.21    | 6.22    | 5.67    | 5.32    | 5.07    | 4.89    | 4.74    | 4.63    | 4.54    | 4.40    | 4.21    | 4.10    | 4.02    | 3.78    | 3.69    | 3.60     |
| 12                                                             | 9.33    | 6.93    | 5.95    | 5.41    | 5.06    | 4.82    | 4.64    | 4.50    | 4.39    | 4.30    | 4.16    | 3.97    | 3.86    | 3.78    | 3.54    | 3.45    | 3.36     |
| 13                                                             | 9.07    | 6.70    | 5.74    | 5.21    | 4.86    | 4.62    | 4.44    | 4.30    | 4.19    | 4.10    | 3.96    | 3.78    | 3.66    | 3.59    | 3.34    | 3.25    | 3.17     |
| 14                                                             | 8.86    | 6.51    | 5.56    | 5.04    | 4.69    | 4.46    | 4.28    | 4.14    | 4.03    | 3.94    | 3.80    | 3.62    | 3.51    | 3.43    | 3.18    | 3.09    | 3.00     |
| 15                                                             | 8.68    | 6.36    | 5.42    | 4.89    | 4.56    | 4.32    | 4.14    | 4.00    | 3.89    | 3.80    | 3.67    | 3.49    | 3.37    | 3.29    | 3.05    | 2.96    | 2.87     |
| 16                                                             | 8.53    | 6.23    | 5.29    | 4.77    | 4.44    | 4.20    | 4.03    | 3.89    | 3.78    | 3.69    | 3.55    | 3.37    | 3.26    | 3.18    | 2.93    | 2.84    | 2.75     |
| 17                                                             | 8.40    | 6.11    | 5.18    | 4.67    | 4.34    | 4.10    | 3.93    | 3.79    | 3.68    | 3.59    | 3.46    | 3.27    | 3.16    | 3.08    | 2.83    | 2.75    | 2.65     |
| 18                                                             | 8.29    | 6.01    | 5.09    | 4.58    | 4.25    | 4.01    | 3.84    | 3.71    | 3.60    | 3.51    | 3.37    | 3.19    | 3.08    | 3.00    | 2.75    | 2.66    | 2.57     |
| 19                                                             | 8.18    | 5.93    | 5.01    | 4.50    | 4.17    | 3.94    | 3.77    | 3.63    | 3.52    | 3.43    | 3.30    | 3.12    | 3.00    | 2.92    | 2.67    | 2.58    | 2.49     |
| 20                                                             | 8.10    | 5.85    | 4.94    | 4.43    | 4.10    | 3.87    | 3.70    | 3.56    | 3.46    | 3.37    | 3.23    | 3.05    | 2.94    | 2.86    | 2.61    | 2.52    | 2.42     |
| 21                                                             | 8.02    | 5.78    | 4.87    | 4.37    | 4.04    | 3.81    | 3.64    | 3.51    | 3.40    | 3.31    | 3.17    | 2.99    | 2.88    | 2.80    | 2.55    | 2.46    | 2.36     |
| 22                                                             | 7.95    | 5.72    | 4.82    | 4.31    | 3.99    | 3.76    | 3.59    | 3.45    | 3.35    | 3.26    | 3.12    | 2.94    | 2.83    | 2.75    | 2.50    | 2.40    | 2.31     |
| 23                                                             | 7.88    | 5.66    | 4.76    | 4.26    | 3.94    | 3.71    | 3.54    | 3.41    | 3.30    | 3.21    | 3.07    | 2.89    | 2.78    | 2.70    | 2.45    | 2.35    | 2.26     |
| 24                                                             | 7.82    | 5.61    | 4.72    | 4.22    | 3.90    | 3.67    | 3.50    | 3.36    | 3.26    | 3.17    | 3.03    | 2.85    | 2.74    | 2.66    | 2.40    | 2.31    | 2.21     |
| 25                                                             | 7.77    | 5.57    | 4.68    | 4.18    | 3.85    | 3.63    | 3.46    | 3.32    | 3.22    | 3.13    | 2.99    | 2.81    | 2.70    | 2.62    | 2.36    | 2.27    | 2.17     |
| 26                                                             | 7.72    | 5.53    | 4.64    | 4.14    | 3.82    | 3.59    | 3.42    | 3.29    | 3.18    | 3.09    | 2.96    | 2.78    | 2.66    | 2.58    | 2.33    | 2.23    | 2.13     |
| 27                                                             | 7.68    | 5.49    | 4.60    | 4.11    | 3.78    | 3.56    | 3.39    | 3.26    | 3.15    | 3.06    | 2.93    | 2.75    | 2.63    | 2.55    | 2.29    | 2.20    | 2.10     |
| 28                                                             | 7.64    | 5.45    | 4.57    | 4.07    | 3.75    | 3.53    | 3.36    | 3.23    | 3.12    | 3.03    | 2.90    | 2.72    | 2.60    | 2.52    | 2.26    | 2.17    | 2.06     |
| 29                                                             | 7.60    | 5.42    | 4.54    | 4.04    | 3.73    | 3.50    | 3.33    | 3.20    | 3.09    | 3.00    | 2.87    | 2.69    | 2.57    | 2.49    | 2.23    | 2.14    | 2.03     |
| 30                                                             | 7.56    | 5.39    | 4.51    | 4.02    | 3.70    | 3.47    | 3.30    | 3.17    | 3.07    | 2.98    | 2.84    | 2.66    | 2.55    | 2.47    | 2.21    | 2.11    | 2.01     |
| 40                                                             | 7.31    | 5.18    | 4.31    | 3.83    | 3.51    | 3.29    | 3.12    | 2.99    | 2.89    | 2.80    | 2.66    | 2.48    | 2.37    | 2.29    | 2.02    | 1.92    | 1.80     |
| 50                                                             | 7.17    | 5.06    | 4.20    | 3.72    | 3.41    | 3.19    | 3.02    | 2.89    | 2.78    | 2.70    | 2.56    | 2.38    | 2.27    | 2.18    | 1.91    | 1.80    | 1.68     |
| 60                                                             | 7.08    | 4.98    | 4.13    | 3.65    | 3.34    | 3.12    | 2.95    | 2.82    | 2.72    | 2.63    | 2.50    | 2.31    | 2.20    | 2.12    | 1.84    | 1.73    | 1.60     |
| 90                                                             | 6.93    | 4.85    | 4.01    | 3.53    | 3.23    | 3.01    | 2.84    | 2.72    | 2.61    | 2.52    | 2.39    | 2.21    | 2.09    | 2.00    | 1.72    | 1.60    | 1.46     |
| 120                                                            | 6.85    | 4.79    | 3.95    | 3.48    | 3.17    | 2.96    | 2.79    | 2.66    | 2.56    | 2.47    | 2.34    | 2.15    | 2.03    | 1.95    | 1.66    | 1.53    | 1.38     |
| $\infty$                                                       | 6.63    | 4.61    | 3.78    | 3.32    | 3.02    | 2.80    | 2.64    | 2.51    | 2.41    | 2.32    | 2.18    | 2.00    | 1.88    | 1.79    | 1.47    | 1.32    | 1.00     |

## שאלות:

- (1) להלן נתונים על שטחי דירות במ"ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013:

|     |    |    |     |    |     |     |      |
|-----|----|----|-----|----|-----|-----|------|
| 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 | 2012 |
|     | 69 | 74 | 105 | 91 | 82  | 100 | 2013 |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששונות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?  
 ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ"ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

- (2) בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר

| B   | A  | סוג המתכת    |
|-----|----|--------------|
| 10  | 8  | $n$          |
| 30  | 16 | $\sum X_i$   |
| 198 | 60 | $\sum X_i^2$ |

- יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:  
 יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.  
 א. האם קיים הבדל בין שונות החוזק של מתכות?  
 ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות?  
 בכל סעיף רמת מובהקות של 10%.

- (3) מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות. ידוע כי בקרב האוכלוסייה הבוגרת (מעל 18) ההוצאה החודשית על בילויים מתפלגת נורמאלית עם תוחלת של 500 ₪ וסטיית תקן של 300 ₪.  
 במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000 ₪. כמות הסטודנטים שנדגמה 16.  
 במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000 ₪.  
 א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ההוצאה על בילויים בקרב סטודנטים בקבוצת גילאי 21-26 נמוכה מהשונות אצל כלל המבוגרים.  
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 1% האם הפיזור של ההוצאה החודשית לבילויים גדולה יותר בקבוצת גיל ה-30 מאשר בקבוצת גיל 21-26.

- (4) נתון  $X_i \sim N(\mu_x, \sigma^2)$ , וכמו כן  $Y_i \sim N(\mu_y, \sigma^2)$ .  
 מאוכלוסייה X נדגמו 7 תצפיות ומאוכלוסייה Y נדגמו 13 תצפיות.

א. כיצד  $\frac{S_x^2}{S_y^2}$  מתפלג?

- ב. מה ההסתברות ש- $S_x^2$  גדולה ביותר מפי 3 מאשר  $S_y^2$ ?

**תשובות סופיות:**

- |    |                       |                       |
|----|-----------------------|-----------------------|
| (1 | א. לא נדחה את $H_0$ . | ב. מסקנה לא תשתנה.    |
| (2 | א. לא נדחה את $H_0$ . | ב. לא נדחה את $H_0$ . |
| (3 | א. נדחה את $H_0$ .    | ב. נדחה את $H_0$ .    |
| (4 | א. $F(6,12)$ .        | ב. 5%                 |