הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשיה וניהול

פרק 56 - בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) 1

בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן):

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות:

1. השערת האפס: המסומנות ב- H_0.
2. השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר): המסומנת ב- H_1.

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה.

דוגמה:

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל-10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה, אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל:

H_0: התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

H_1: התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים:

1. אזור דחייה: דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה).
2. אזור קבלה: קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה.
המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם.
אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת, אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):
(לדחות H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לדחות את H_0) $= \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:
(לקבל H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לקבל את H_0) $= \beta$.

רמת בטחון:
(לקבל H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לקבל את H_0) $= (\alpha - 1)$.

עוצמה:
(לקבל H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לדחות את H_0) $= (\beta - 1) = \pi$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש-5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א' – השערת האפס)
או ש-7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב' – השערה אלטרנטיבית).
כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל
ההחלטה הבא: אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' H_1.

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?

2) ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון.
ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון.
הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה, אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?

3) יהי X מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- X יקבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k)=\frac{1}{n}$ עבור $k=1,2,.....,n$.
נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של X: $H_1: n=6$, $H_0: n=4$.
כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם: $X>3$.
חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?

4) איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.2	0.2	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע.
על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בנוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מה מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמקו!

5) במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל-7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?

ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) להלן השערות:

$H_0 : X \sim t(5)$ - התפלגות T עם חמש דרגות חופש.

$H_1 : X \sim Z$ - התפלגות נורמלית.

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם X גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כלל ההחלטה?
ב. מהי העוצמה של כלל ההחלטה?

7) במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6,600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמאלית.

א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?
ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?
   i. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.
   ii. מצב חרום מוגדר כעת בתוחלת של 7,500 יחידות.
   iii. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6,700.

8) במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל?
ב. מהי העצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות. חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".

א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?

ב. על סמך תוצאות המדגם, מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?

ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

תשובות סופיות:

1) ראה סרטון וידאו.

2) $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{5}$.

3) $\alpha=0.25$, $\beta=0.5$.

4) א. $\alpha=0.2$, $\beta=0.8$. ב. $\alpha=0.2$, $\beta=0.3$. ג. כלל ב'.

5) א. השערות: H_0 -מטבע תקין. ב. 0.00781250. ג. 0.1678.

H_1 -מטבע לא תקין.

6) א. 0.05. ב. 0.022.

7) א. 0.0228. ב. 0.0918. ג. 0.9082.

ד. i. α,β יקטנו. ii. α לא משתנה, β קטנה.

ד. iii. α קטנה, β גדלה.

8) א. 0.055. ב. 0.383.

9) א. 0.0188. ב. טעות מסוג I. ג. 0.8944.

ד. העוצמה תגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל