אופטיקה וגלים

פרק 3 - אנליזת פורייה

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 1

אנליזת פורייה

טורי פורייה

רקע

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+B_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2.

$$A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

מכפלה פנימית

$$\int_0^L f(x)g(x)dx$$

פונקציות אורתוגונליות

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx=0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

טור אקספוננטים:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$C_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$C_n=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים:

$B_n=i\left(C_n-C_{-n}\right)$	$A_n=C_n+C_{-n}$
$C_{-n}=\frac{1}{2}\left(B_n+iA_n\right)$	$C_n=\frac{1}{2}\left(B_n-iA_n\right)$

$$\frac{A_0}{2}=C_0$$

תופעת גיבס:

- קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
- בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים)

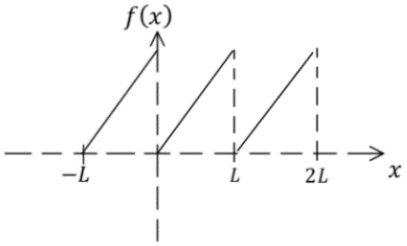
bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) דוגמה - פונקציית מסור

מצאו את טור פורייה עבור פונקציית מסור:

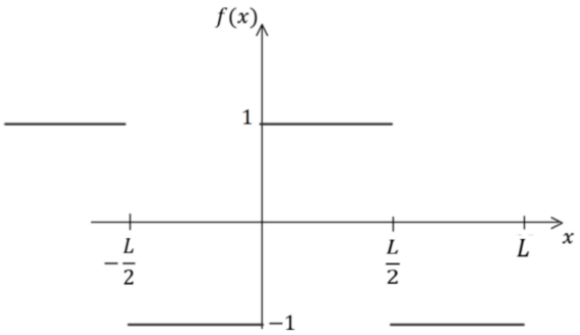
$f(x)=Ax$ כאשר $0 \le x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



2) דוגמה - פונקציית סימן

מצאו את המקדמים של טור פורייה של הפונקציה $f(x)$ השווה לפונקציית סימן $sign(x)$, בתחום $-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$ ובעלת מחזור L. ציירו באמצעות מחשב את המקרה של $N=1$, $N=3$, $N=10$ ו- $N=50$ עבור $L=1$

$$sign(x)=\begin{cases}1, & x \ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$



3) תרגיל - פונקציית משולש

נתונה פונקציית משולש

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}x, & 0 \le x \le \frac{L}{2}\\ L-x, & \frac{L}{2} \le x \le L\end{cases}$$

המוגדרת בתחום $0 \le x \le L$

א. כתבו את הפונקציה כטור פורייה של קוסינוסים וסינוסים.

ב. כתבו את הפונקציה כטור סינוסים.

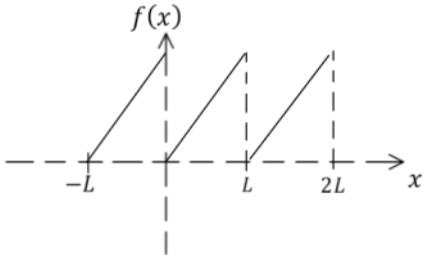
ג. כתבו את הפונקציה כטור קוסינוסים.

ד. הראו כי התוצאה של סעף ג' מתלכדת עם התוצאה של סעיף א' והסבירו מדוע.

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

4) תרגיל - פונקציית מסור עם אקספוננטים

א. מצאו את טור אקספוננטים עבור פונקצית המסור מהדוגמה בתחילת הפרק: $f(x)=Ax$ כאשר $0 \le x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



ב. מצאו את המקדמים של טור סינוסים וקוסינוסים באמצעות המקדמים שמצאתם בסעיף א' והראו שהתשובה זהה לתשובה שקיבלנו בדוגמה של תחילת בפרק.

5) תרגיל - פונקציה לינארית בתחומים שונים

מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x)=x$ בתחומים הבאים:

א. $[0,2\pi]$

ב. $[-\pi,\pi]$

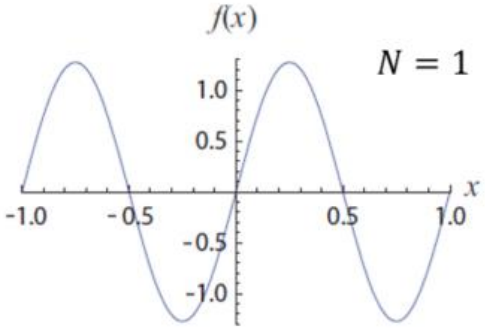
ג. $[0,4\pi]$

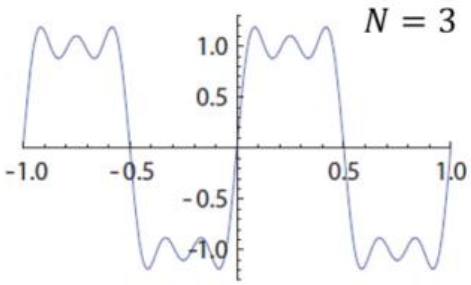
bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

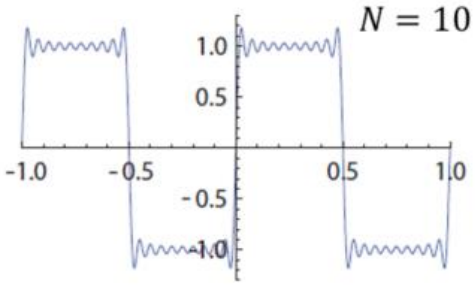
תשובות סופיות

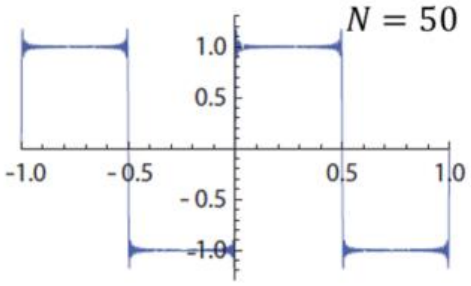
1) $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=n}^{\infty}-\frac{AL}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

2) $A_n=0$ לכל n; $B_n=\begin{cases}\frac{4}{\pi n} & n \text{ odd}\\ 0 & n \text{ even}\end{cases}$.









3) א. $f(x)=\frac{L}{4}-\sum_{n=1,\text{ odd}}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

ב. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ג. $f(x)=\frac{L}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\left(2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ד. כי שכפול הפונקציה על מחזור L נותן פונקציה זוגית.

4) א. $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{iLA}{2\pi n}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$

ב. $A_0=AL,\ A_n=0,\ B_n=-\frac{LA}{\pi n}$

5) א. $f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx)$

ב. $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

ג. $f(x)=2\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

התמרת (טרנספורם) פורייה

רקע

התמרה (טרנספורם) פורייה

$$F(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

התמרה הפוכה

$$f(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

תכונות:

1. לינאריות: $\mathrm{FT}[\alpha f(\mathrm{x}) + \beta g(\mathrm{x})] = \alpha\mathrm{FT}[f(\mathrm{x})] + \beta\mathrm{FT}[g(\mathrm{x})]$

אם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\mathrm{x})|\,\mathrm{dx} \neq \infty$ אז $f(\mathrm{x}) \in G$

- אם $f(\mathrm{x}) \in G$ אז $F(\mathrm{k})$ רציפה
- אם $f(\mathrm{x}) \in G$ אז $\lim_{\mathrm{k}\to\pm\infty} F(\mathrm{k}) = 0$, רימן - לבג
- אם $f(\mathrm{x})$ זוגית אז $\mathrm{F(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{f(x)}\cos(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx}$
- אם $f(\mathrm{x})$ אי-זוגית אז $\mathrm{F(k)} = -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{f(x)}\sin(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx}$
- אם $f(\mathrm{x})$ ממשית אז $\overline{\mathrm{F(k)}} = \mathrm{F}(-\mathrm{k})$

התמרות של פונקציות מיוחדות:

גאוסיאן

$$FT\left[A\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right] = \frac{A\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

אקספוננט

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

$$FT\left[Ae^{-\alpha|x|}\right]=\frac{\alpha A}{\pi(\alpha^2+k^2)}$$

לורנציאן

$$FT\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-\alpha|k|}$$

פונקציית דלתא

$$FT[\delta(x)]=\frac{1}{2\pi}$$

קבוע

$$FT[1]=\delta(k)$$

<u>נוסחת הכפל באקספוננט , קוסינוס או סינוס (מודולציה):</u>

$$FT\left[f(x)e^{iCx}\right]=F(k-C)$$

$$FT[f(x)\cos(Cx)]=\frac{F(k-C)+F(k+C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin(Cx)]=\frac{F(k-C)-F(k+C)}{2i}$$

<u>נוסחת הכיווץ והזזה:</u>

$$FT[f(ax+b)]=\frac{1}{|a|}e^{i\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$$

<u>נוסחת הנגזרת:</u>

אם $f(x),f'(x)\in G$ ו- $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז:

$$FT\left[f'(x)\right]=ikF(k)$$

<u>נוסחת המומנט:</u>

אם $xf(x)\in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו- $FT[xf(x)]=i\frac{d}{dk}F(k)$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) דוגמה - אקספוננט עם פונקציית טטה

חשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = Ae^{-\alpha x}\theta(x)$$

כאשר $\theta(x)$ היא פונקציית Heaviside המוגדרת לפי: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

2) דוגמה - פונקציית חלון

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3) דוגמה - חלון מורחב

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון מורחב המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -r \leq x \leq r \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$ כאשר $r > 0$.

4) תרגיל - נגזרת של לורנציאן

השתמשו בנוסחת הנגזרת ומצאו את התמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

5) תרגיל - חלון כפול איקס

השתמשו בנוסחת המומנט וחשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

6) תרגיל - גאוסיאן כפול איקס בריבוע

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2 e^{-\alpha x^2}$.

7) תרגיל - משוואה עם נגזרת ראשונה

פתרו את המשוואה הבאה $\frac{d}{dt}q(t) + bq(t) = f_0 e^{-at}\theta(t)$.

כלומר מצאו את $q(t)$ באופן מפורש עבור $a, b > 0$.

רמז: מצאו את הפירוק לשברים חלקיים לפי הדרך הבאה

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{A}{x+b} + \frac{B}{x+a}$$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) $\frac{A}{2\pi\left(a+ik\right)}$

2) $\frac{1}{\pi}\sin c\left(k\right)$

3) $\frac{\sin\left(rk\right)}{\pi k}$

4) $\frac{-ik}{4\alpha}e^{-\alpha(k)}$

5) $\frac{i}{\pi}\left(\frac{k\cos k-1\cdot\sin k}{k^2}\right)$

6) $\frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi\alpha^3}}\left(1-\frac{k^2}{2\alpha}\right)$

7) $q\left(t\right)=\frac{1}{b-a}f_0\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\theta\left(t\right)+Ce^{-bt}$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©