# אלקטרומגנטיות אנליטית 1

## פרק 1 - אנליזה וקטורית

### תוכן העניינים

1. הסבר ותרגילים ..... 1

# הסבר ותרגילים:

## שאלות:

**1) שטח דיסקה**

חשב שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

**2) חישוב נפח כדור**

חשב נפח של כדור באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות כדוריות.

**3) דיסקה עם חור**

מצא את צפיפות המטען של דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה במטען כולל Q המתפלג בצורה אחידה.

בדיסקה קדחו חור ברדיוס r, מצא את כמות המטען שהוצאה מהדיסקה.

**4) מטען כולל בכדור**

מצא את המטען הכולל בכדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען: $\rho(r)=\rho_0\frac{r}{R}$.

**5) פירוק וקטור לרכיבים גליליים**

נתון השדה הוקטורי הבא: $\vec{A}=a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z}$ כאשר $a$ , $b$ , $c$ קבועים נתונים.

א. האם $\vec{A}$ וקטור קבוע?

ב. מצא את הרכיבים של $\vec{A}$ בקואורדינטות גליליות ובטא אותן בעזרת: $r$ , $\theta$ , $z$.

**6) פירוק וקטור לרכיבים בקואורדינטות כדוריות**

נתון השדה הוקטורי הבא: $\vec{A}=a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z}$ כאשר $a$ , $b$ , $c$ קבועים נתונים.

מצא את הרכיבים של $\vec{A}$ בקואורדינטות כדוריות ובטא אותן בעזרת: $r$ , $\varphi$ , $\theta$.

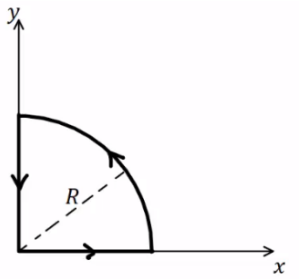
**7) divr**

חשב את $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$ כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור המיקום. בצע את החישוב בקואורדינטות קרטזיות גליליות וכדוריות.

**8) הוכחה של דיברגנט של סקלרית כפול וקטורית**

הוכח את הזהות הבאה: $\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{A}\right)=f\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$ כאשר $\vec{A}$ היא פונקציה וקטורית כלשהיא ו- $f$ היא פונקציה סקלרית כלשהיא.

**9) אינטגרל קווי על רבע מעגל**



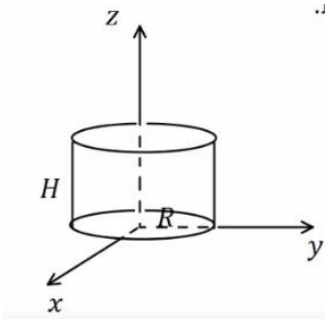

נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה: $\vec{F}=2\hat{r}+3\hat{\varphi}-5\hat{\theta}$

בקואורדינטות כדוריות כאשר $\varphi$ היא הזווית עם ציר z.

א. חשב את: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{l}$ לאורך המסלול הרבע מעגלי באיור.

ב. חשב את: $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}$ על השטח שכלוא בתוך המסלול.

**10) אינטגרל על מעטפת גלילית**




נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה: $\vec{F}=ar\hat{r}+b\hat{\theta}+czz$ ,

בקואורדינטות גליליות, כאשר $a$ , $b$ , $c$ קבועים נתונים.

נתונה מעטפת גלילית ברדיוס R וגובה H הנמצאת כך שציר הסימטריה שלה הוא ציר ה-z ובסיסה מונח על מישור $xy$.

א. חשב את: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{s}$ על כל שטח המעטפת הגלילית.

ב. חשב בצורה מפורשת את: $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}dv$ על הנפח הכלוא בתוך המעטפת.

**11) מצא וקטור יחידה מאונך לפונקציה**

מצא וקטור יחידה המאונך לפונקציה: $f=ax^2+by^2+cz^2$ .

הוקטור צריך להיות פונקציה של: $x$ , $y$ , $z$ .

**12) מציאת רכיב בכיוון הגרדיאנט**

נתונה הפונקציה הסקלרית: $f\left(x,y,z\right)=2xy$ ,

והפונקציה הוקטורית: $\vec{A}=2\hat{x}+5\hat{y}-4\hat{z}$ .

א. חשב את: $\vec{\nabla}f$ .

ב. מצא את הרכיב של $\vec{A}$ בכיוון של $\vec{\nabla}f$ בנקודה המתאימה ל- $f=12$ , $x=2$ .

**13) הוכחה של דיב-רוט שווה לאפס**

הוכח כי: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$ .

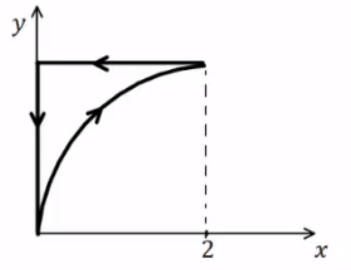
**14) חוק סטוקס על מסלול של קווים ישרים**

נתון השדה הוקטורי: $\vec{A}=y\hat{x}-x\hat{y}$.

א. חשב את האינטגרל הקווי: $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ לאורך המסלול המתואר ע"י הקווים הישרים המחברים בין הנקודות הבאות במישור $xy$:
$(0,0)\to(2,0)\to(0,1)\to(0,0)$.

ב. חשב את האינטגרל המשטחי: $\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$ על השטח הסגור בתוך המסלול של סעיף א'.

**15) חוק סטוקס על מסלול פרבולי**




נתון שדה וקטורי: $\vec{A}=x^2y\hat{x}+y^2x\hat{y}+C\cos(\beta y)\hat{z}$

כאשר $\beta$ ו- $C$ קבועים נתונים.

א. חשב את האינטגרל: $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ על המסלול המתואר באיור.

משוואת העקום היא: $y^2=bx$ כאשר $b$ קבוע נתון.

ב. חשב את האינטגרל: $\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$ על השטח התחום ע"י המסלול.

## תשובות סופיות:

1) $S=\pi R^2$.

2) $V=\frac{4\pi R^3}{3}$.

3) $q=Q\left(\frac{r}{R}\right)^2$ , $\sigma=\frac{Q}{\pi R^2}$.

4) $Q=\rho_0\pi R^3$.

5) א. כן. ב. $A_r=a\cos\theta+b\sin\theta$ , $A_Q=-a\sin\theta+b\cos\theta$ , $A_z=C$.

6) $A_r=a\sin\varphi\cos\theta+b\sin\varphi\sin\theta+C\cos\varphi$ , $A_\varphi=a\cos\varphi\cos\theta+b\cos\varphi\sin\theta-C\sin\varphi$ , $A_\theta=-a\sin\theta rb\cos\theta$.

7) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$.

8) הוכחה.

9) א. $\oint\vec{F}\cdot d\vec{l}=-5R\frac{\pi}{2}$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}=-5R\frac{\pi}{2}$.

10) א. $\oint\vec{F}\cdot d\vec{s}=(2a+C)\pi R^2H$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}dv=(2a+C)\pi R^2H$.

11) $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2}}(ax,by,cz)$.

12) א. $\vec{\nabla}f=2y\hat{x}+2x\hat{y}+0\cdot\hat{z}$. ב. $\frac{16}{13}(3,2)$.

13) הוכחה.

14) א. $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=-2$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot=-2$.

15) א. $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=-\frac{1}{21}2^{\frac{7}{2}}b^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}}$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}=\frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}}-\frac{2^{\frac{7}{2}}}{21}b^{\frac{1}{2}}$.