# שיטות סטטיסטיות

## פרק 17 - אמידה נקודתית

### תוכן העניינים

# אומד חסר הטייה:

## רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-$\theta$ : $E(\hat{\theta})=\theta$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

המשתנה $X$ הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **הסתברות** | $2\theta$ | $1-60\theta$ | $4\theta$ |

מעוניינים לאמוד את $\theta$ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: $X_1$ ו-$X_2$.

א. הראו שהאומד: $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-$\theta$.

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta})-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד $T_1$?

ג. תקנו את $T_1$, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם $g$ תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X=3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה $\sigma^2$ : $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של $X$.

**תזכורות חשובות:**

אם: $Y = aX + b$, אזי: $E(Y) = aE(X) + b$ , $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$ , $\sigma_Y = |a|\sigma_x$.

אם: $X_1, X_2, ......., X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$E(T) = E(X_1 + X_2 + ...... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ...... + E(X_n)$.

אם: $X_1, X_2, ......., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$V(T) = V(X_1 + X_2 + ...... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ...... + V(X_n)$.

## שאלות:

**1)** הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת $\mu$ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת $\mu$, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.

שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\dfrac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\dfrac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\dfrac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?

ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.

ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.

ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

**2)** כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- $\sigma^2$. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה: $T_2=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$ , $T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.

ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

**3)** $X\sim B(n,p)$. כלומר, $X$ הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר $P$ (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל $n$.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- $P$.

ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?

ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?

ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E\left(X^2\right)$.

**4)** בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: $\theta$, $0 \le \theta \le 2$.
פונקציית ההסתברות של $X$ - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:
$P(X=0)=1-\frac{\theta}{2}$ , $P(X=1)=\frac{\theta}{3}$ , $P(X=2)=\frac{\theta}{6}$.

א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.
ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - $X_1, X_2, X_3$ (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

**5)** בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר $\theta$ באופן הבא:
הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא $3\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא $\theta$.
במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך תצפית בודדת.
ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך 4 תצפיות.
ג. מהו האומדן לפרמטר $\theta$ על סמך תוצאות המדגם.
ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.
ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

**6)** קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:
א. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $5\theta$.
ב. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $T^2$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $\theta^2$.

**7)** במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא $p$ , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$.
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- $X$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה,
וב- $Y$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- $p$ ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

**8)** יהיו $T_1$ ו- $T_2$ אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר $\theta$.

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta^2$, המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$.

**9)** נתון ש- $X$ הינו משתנה מקרי עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$.
נדגמו $n$ תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- $\mu$ , כאשר: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$.
הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- $\mu^2$.

## תשובות סופיות:

1) א. $T_1$ ו- $T_2$. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1=76.6$ , $T_2=110$ ד. $T_1$.

2) א. ראו בווידאו. ב. $T_2$.

3) א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$ ג. $X$. ד. $\theta$.

4) א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

5) א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125. ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.
ה. לשונות 0.917.

6) א. נכון. ב. לא נכון.

7) ב'.

8) א. $T_1\cdot T_2$. ב. $T_1-T_1\cdot T_2$.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

# אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

**רקע:**

$T$ יהיה MVUE, אם מתקיים ש- $T$ אומד חסר הטיה ל- $\theta$, ובנוסף מתקיים ש:
$V(T)\le V(\hat{\theta})$, לכל $\hat{\theta}$ חסר הטיה אחר.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של $\lambda$ בסניף A וקצב של $2\lambda$ בסניף B.
נדגמו $n$ ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:
$X_i$ - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום $i$.
$Y_j$ - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום $j$.
על מנת לאמוד את $\lambda$, מוצע האומד: $\alpha\bar{X}+\beta\bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על $\alpha$ ו- $\beta$, כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות $\alpha$ ו-$\beta$ כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

## שאלות:

**1)** $T_1$ ו- $T_2$ הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר $\theta$.
כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.
א. מה צריך להיות התנאי על $a$ ו- $b$, כדי ש- $T$ יהיה אומד חסר הטיה?
ב. $\sigma_1^2$ ו- $\sigma_2^2$ הם השונויות של $T_1$ ו- $T_2$, בהתאמה.
מצאו $a$ ו- $b$, כך ש- $T$ יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$, ובעל שונות מינימלית.

**2)** במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.
תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.
השונויות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$ , $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.
הוחלט לדגום $n$ חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.
$\bar{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה $i$.
יהי: $W = \sum_{i=1}^{3} a_i \bar{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.
א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים $a_i$, כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?
ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.
מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $a + b = 1$. ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ , $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

**2)** א. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$. ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.