

# שיטות כמותיות לניהול

פרק 12 - אלגברה ליניארית - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית.....1

## מרחבי מכפלה פנימית

### שאלות

(1) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ .

(2) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ ?

(3) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3)$  ב- $\mathbb{R}^3$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + kx_1 y_3 + x_2 y_2 + kx_3 y_1 + x_3 y_3$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$ ?

(4) לכל שני וקטורים  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ב- $\mathbb{R}^n$ ,

נגדיר:  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n k_i u_i v_i$ , כאשר  $k_1, \dots, k_n$  מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$ .

מהי המכפלה המתקבלת אם  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ?

(5) לכל שתי מטריצות  $A, B$  ב- $M_{mn}[R]$ , נגדיר:  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$ .

$\text{tr}$  מייצג את המילה  $\text{trace}$  (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

(6) לכל שתי פונקציות  $f, g$  ב- $C[a, b]$ , נגדיר:  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g dx$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .

- (7) נתונה מכפלה פנימית על  $R^3$ , שעבורה הקבוצה  $B = \{(1,1,0), (1,1,0), (1,0,0)\}$  מהווה בסיס אורתונורמלי. חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$ .

### תשובות סופיות

- (1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
- (2)  $k > 9$
- (3)  $-1 < k < 1$
- (4) עבור  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ , נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$ .
- (6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .
- (7)  $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$