

מתמטיקה 3855

פרק 17 - אלגברה ליניארית - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות 1
2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות 6
3. המטריצה ההופכית 7
4. דרגה של מטריצה 10
5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית 14
6. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית 15

מטריצות

שאלות

- (1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

- (2) מצאו את x, y, z , אם ידוע כי:
- $$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

(3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

(4) $2tr(D^2 - 2E)$

(5) א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

(6) $I_2 BC$

(7) $tr(C^T C)$

(8) $DABC$

(9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .

$$\text{נתון כי } (A-I)(A+I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

(10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ שמקימות $A^2 = -4I$.

$$(11) \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

(12) שתי מטריצות A ו- B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו- B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות

A ו- B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T = -A$.

(13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .

$$\text{נתון כי } AA^T = 0. \text{ הוכיחו כי } A=0.$$

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

(14) יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k = B^k A$.

ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k = A^k B^k$.

$$(15) \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו- B מטריצות ריבועיות

מסדר ℓ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו- B , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו- $(A-I)^n$, כאשר A ו- I ריבועיות מסדר

ℓ .

- 16** א. הגדירו והדגו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
 ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
 הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

- 17** תהי $A_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
 תהי $B_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

- א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
 ב. המטריצה C מקיימת $C = A \cdot B$.
 חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1 \leq i, j \leq n$.

- 18** מצאו מטריצה ממשית A , כך שיתקיים $A - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$.

תשובות סופיות

(1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6

ז. 6×2 ח. לא ט. 6×4 י. 6×6

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10) $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג. $(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$

$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \cdots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

- (1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
 1. AA^T סימטרית.
 2. $A + A^T$ סימטרית.
 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.
- (2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
 1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
 2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
 3. $A^2 + B$ סימטרית.
- (3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
 1. AB^3 אנטי-סימטרית.
 2. AB^2 סימטרית.
 3. $(A - B)^2$ סימטרית.
- (4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:
 1. AB אנטי-סימטרית.
 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.
- (5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(7)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את X :

(12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

(13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{16) נתון}$$

חשבו את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{17) נתון}$$

חשבו את B , אם נתון בנוסף כי $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \qquad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) \qquad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad A \quad \text{א.} \quad CD^2 - A \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15) \qquad BA^T C (B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17) \qquad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמתו את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{עבור}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \quad \text{(3) נתונה המטריצה}$$

חשבו את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

$$\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1 \quad \text{א.}$$

$$\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1 \quad \text{ב.}$$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \text{rank}(A) = \text{rank}(AB), \text{ אז בהכרח } B \text{ הפיכה.}$$

$$\text{ב. ייתכן ש-} \text{rank}(A) < \text{rank}(AB).$$

$$\text{ג. אם } \text{rank}(A) > \text{rank}(B), \text{ אז } \text{rank}(AB) > \text{rank}(B).$$

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

ב. חשבו את $\text{rank}(B^{10}A^{14})$.

(7) נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

$$\text{הוכיחו כי } \text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

(8) תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

$$\text{כך ש-} A = A_1 + A_2 + A_3.$$

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

(9) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$\text{א. } \text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$$

$$\text{ב. } \text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

(10) תהי A מטריצה מסדר $m \times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n \times m$.

הוכיחו:

$$\text{א. אם } AB = I_m \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$$

$$\text{ב. אם } BA = I_n \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$$

$$\text{ג. אם } AB = I_m \text{ וגם } BA = I_n \text{ אז בהכרח } m = n$$

$$\text{ד. אם } A \text{ לא ריבועית אז לא ייתכן שגם } AA^T = I_m \text{ וגם } A^T A = I_n$$

(11) בשדה F נתונים $a_1, a_2, \dots, a_m$ איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$ איברים,

שלא כולם אפס.

$$\text{קבעו מהי דרגתה של המטריצה } M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \text{ כאשר } m_{ij} = a_i b_j.$$

12) תהי $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$,

כאשר $b_1, b_2, \dots, b_n$ מספרים ממשיים שונים ו- $n \geq 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n \geq 2$?
הוכיחו או הפריכו.

13) תהיינה A, B מטריצות מעל $\mathbb{R}$, מסדר $m \times n$, כך שלכל $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$,

מתקיים $A\underline{x} \neq B\underline{x}$.

מה הדרגה של המטריצה $A - B$?

14) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x} = \underline{0}$, הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A .

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB) = \rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB) < \rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15) תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.

א. הוכיחו כי $P(A) \subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2) < \rho(A)$.

הוכיחו שקיים $v \in \mathbb{R}^n$, כך ש- $Av \neq 0$ וגם $A^2v = 0$.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$ אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $\text{rank}(A)=4$ $k \neq 1, 4, 10$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.
- ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10} A^{14})=2$.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) n
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

(1) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

$$2x - y + z = 3$$

בעזרת המטריצה ההפוכה : $3x - 2y + 2z = 5$.

$$5x - 3y + 4z = 11$$

(2) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה : $y + z + t = 1$.

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

תשובות סופיות

(1) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

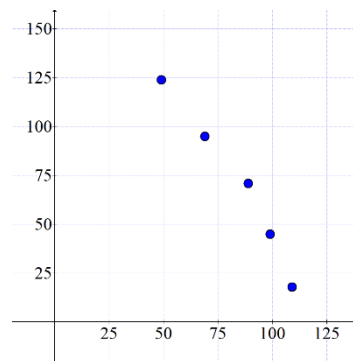
(2) $(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2)$

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה ליניארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4, -1)$, $(-2, 0)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$. מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49\$	124
69\$	95
89\$	71
99\$	45
109\$	18

- מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- מה משמעות השיפוע של הישר?
- מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

1) $f(x) = 0.8x + 2$

2) א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. 119.2 יחידות.

ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.

ד. 14.41