

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 19 - אלגברה ליניארית - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג 1
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n 6
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות 11
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות 13

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\
 \text{ב.}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \\
 \text{א. (7)}
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right| \\
 \text{ג.}
 \end{array}
 \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{array} \right| \\
 \text{(8)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{array} \right| \\
 \text{(9)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right| \\
 \text{(10)}
 \end{array}$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{array} \right| \\
 \text{ג.}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right| \\
 \text{ב.}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right| \\
 \text{א. (11)}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad \text{(13)}$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad \text{(14)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(15)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{17) הוכיחו כי:}$$

בשאלות 18-19 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
חשבו:

$$\text{18) א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$\text{19) א. } |-A^2B^TA^3| \quad \text{ב. } |-2A^2A^T \operatorname{adj} B|$$

$$\text{20) נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B. \quad \text{הוכיחו: } |A|=|B|.$$

$$\text{21) נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-} 2AB+3I=0, |A|=2. \quad \text{חשבו את } |B|.$$

$$\text{22) נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-} A+3B=0, B^2-2A^{-1}=0. \quad \text{חשבו את } |A|, |B|.$$

$$\text{23) הוכיחו: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{2. } |\operatorname{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}.$$

$$\text{24) נתון כי } A \text{ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.} \quad \text{הוכיחו ש-} |A|=0.$$

$$\text{25) נתון: } A \text{ מטריצה מסדר } n, |A|=128, 2AB=B^TA^2, \text{ ו-} B \text{ הפיכה.} \quad \text{מצאו את } n.$$

$$\text{26) נתון: } \det(A_{n \times n}) = 2, \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{חשבו: } \det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right).$$

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. 4 ב. 2^{13}
- (19) א. -8 ב. -2^{11}
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) $\frac{81}{32}$
- (22) $|A|=18, |B|=-2/3$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.
- (25) 7
- (26) 4^n

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0, \dots, a_{n-1}$, המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- n ?

(3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij} = |i - j|$.

(5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את $|A|$.

(9) המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של k המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 3$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j=1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i=1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את $D_n = |A_{n \times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n = |A_{n \times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3, b=1, c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

(13) נתונה מטריצה $A_{n \times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:

מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה

הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה B .

חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min\{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \quad (18) \text{ חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר } n, \text{ כאשר } n \geq 2$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0.$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3) n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \quad \text{והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0.$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$(13) \quad |B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(14) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(15) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(16) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(17) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases}$$

$$(18) \quad D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases}$$

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B| = 2$, $|A| = 4$.
חשבו:

(1) א. $|ABA^{-1}B^T|$ ב. $|4A^2B^3|$

(2) א. $| -A^{-2}B^T A^3 |$ ב. $| -2A^2 A^T \text{adj} B |$

(3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ = B$.
הוכיחו: $|A| = |B|$.

(4) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB + 3I = 0$, $|A| = 2$.
חשבו את $|B|$.

(5) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2 - 2A^{-1} = 0$, $A + 3B = 0$.
חשבו את $|A|$, $|B|$.

(6) הוכיחו: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$

(7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש- $|A| = 0$.

(8) נתון: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, ו- B הפיכה.
מצאו את n .

(9) נתון: $\det(A_{n \times n}) = 2$, $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$.

חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

תשובות סופיות

(1) א. 4 ב. 2^{13}

(2) א. -8 ב. -2^{11}

(3) שאלת הוכחה.

(4) $\frac{81}{32}$

(5) $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9) 4^n

(10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x+2z+5t=8 & & \\ -2x-6y=-8 & & x+z=3 \\ 5x+3y-7z+4t=5 & \textbf{(3)} & 4x+y+8z=21 \quad \textbf{(2)} \\ 2x+5y+44z=51 & & 2x+3z=8 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+2y=5 & & \\ 3x+4y=11 & \textbf{(1)} & \end{array}$$

תשובות סופיות

$$\begin{aligned} x=1, y=2 & \quad \textbf{(1)} \\ x=1, y=1, z=2 & \quad \textbf{(2)} \\ x=y=z=t=1 & \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$