# הסתברות

## פרק 43 - אי שוויונים בהסתברות

### תוכן העניינים

1. אי שוויון מרקוב ..... 1
2. אי שוויון צ'בישב ..... 5

# אי-שוויון מרקוב:

## רקע:

אי-שוויון מרקוב רלבנטי לשימוש עבור כל משתנה מקרי אי-שלילי.

הפרמטר $a$ הינו ממשי וחיובי ואז חייב להתקיים ש: $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$,

לכן מתקיים גם ש: $P(X < a) \geq 1 - \frac{E[X]}{a}$.

**דוגמה:**

אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשבו לפי אי-שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.

$X$ = אורך חיים של מכשיר (רציף).

$X \geq 0$ , $E[X] = 500$

$$P(X \geq 1500) \leq \frac{E[X]}{a} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

לכן, $0 \leq P(X \geq 1500) \leq \frac{1}{3}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 65.
מצאו חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 75.

**2)** התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות.
העריכו את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 ילדים.

**3)** $X$ משתנה מקרי רציף אי-שלילי, שתוחלתו 15.
האם ייתכן ש: $P(X > 65) = 0.3$?

**4)** $X$ משתנה מקרי בדיד, המקיים: $X > -2$, ותוחלתו 6.
מצאו חסם תחתון ל- $P(X < 10)$.

**5)** $X$ משתנה מקרי המקיים: $P(X \geq 0) = 1$ ו- $s > 0$ קבוע ממשי.
הוכיחו כי: $P(X < sE(X)) \geq \frac{s-1}{s}$.

**6)** נתון ש- $X_i \sim P(\lambda)$, $i = 1, 2, ..., n$ הם משתנים בלתי תלויים.
מצאו חסמים להסתברות ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda$.

**7)** הוכיחו את אי-שוויון מרקוב.
רמז: היעזרו במשתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר $X \geq a$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** בשכונה חדשה בונים $n$ בתים חדשים הנבנים בחלקת אדמה עגולה. כל בית נצבע בלבן בסיכוי $p$ ללא תלות בבתים האחרים. בניין שלא נצבע בלבן נצבע באפור. בית לבן הוא בית בודד אם הוא נמצא בין שני בתים אפורים.
נגדיר את $X$ להיות מספר הבתים הלבנים הבודדים.

א. מצאו את התוחלת של $X$.

ב. כעת נניח ש-$p=\frac{1}{4}$. הראו שהסיכוי שמספר הבתים הלבנים הבודדים יהיה קטן מ-$\frac{n}{4}$ הוא לפחות $\frac{7}{16}$.

**9)** הוכיחו את אי-שוויון צ'בישב: אם $X$ הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך $k$ חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq k\}\leq\frac{Var(X)}{k^2}$.

רמז: היעזרו באי-שוויון מרקוב.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) $P\left(X \geq 75\right) \leq \frac{65}{75} = \frac{13}{15}$.

2) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

3) לא יתכן.

4) $\frac{1}{3}$.

5) שאלת הוכחה.

6) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $n \cdot p\left(1-p\right)^2$. ב. שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אי-שוויון צ'בישב:

## רקע:

אם $X$ הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך $a$ חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq a\}\leq\frac{Var(X)}{a^2}$.

מכאן גם נובע שמתקיים: $P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$.

אי-שוויון צ'בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידיעת ההתפלגות של המשתנה המקרי $X$.

**דוגמה:**

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$$\sigma(X)=3$$

נציב: $P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$,

$$P\{|X-E(X)|<5\}\geq 1-\frac{3^2}{5^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=0.64$$

$P\{|X-E(X)|<5\}\neq 0.6$, לכן לא יתכן.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3:

א. $p(2<x<14)$.

ב. $p(|x-8|\geq 9)$.

**2)** האם קיים משתנה מקרי $X$ בעל תוחלת $\mu$ וסטית תקן $\sigma$ שעבורו מתקיים $P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)=0.7$? הסבירו.

**3)** מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

**4)** מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?

**5)** מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

**6)** אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.

**7)** בוחרים קוד $n$ ספרתי באופן מקרי.

א. עבור $n=10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.

ב. מה אורך הקוד המינימלי ($n$) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת,
ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות.
נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאד.
העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות
יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

**9)** $X_1, X_2..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר $p$ באופן בלתי תלוי זה בזה. $0 < p < 1$. הוכיחו שמתקיים: $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n}$.

**10)** $X_1, X_2..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

הוכיחו שמתקיים: $P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל-$\frac{1}{9}$.

**2)** לא יתכן.

**3)** 0.75.

**4)** לפחות 0.7.

**5)** לפחות 30.

**6)** 0.52.

**7)** א. לכל היותר 0.825. ב. 294.

**8)** 0.7056.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** שאלת הוכחה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל