מבוא לסטטיסטיקה והסתברות

פרק 3 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

אי-שוויון מרקוב:

רקע:

אי-שוויון מרקוב רלבנטי לשימוש עבור כל משתנה מקרי אי-שלילי.

הפרמטר a הינו ממשי וחיובי ואז חייב להתקיים ש: $P(X \ge a) \le \frac{E[X]}{a}$,

לכן מתקיים גם ש: $P(X < a) \ge 1 - \frac{E[X]}{a}$.

דוגמה:

אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשבו לפי אי-שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.

$X =$ אורך חיים של מכשיר (רציף).

$X \ge 0$, $E[X] = 500$

$$P(X \ge 1500) \le \frac{E[X]}{a} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

לכן, $0 \le P(X \ge 1500) \le \frac{1}{3}$.

שאלות:

1) ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 65.
מצאו חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 75.

2) התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות.
העריכו את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 ילדים.

3) X משתנה מקרי רציף אי-שלילי, שתוחלתו 15.
האם ייתכן ש: $P(X > 65) = 0.3$?

4) X משתנה מקרי בדיד, המקיים: $X > -2$, ותוחלתו 6.
מצאו חסם תחתון ל- $P(X < 10)$.

5) X משתנה מקרי המקיים: $P(X \ge 0) = 1$ ו- $s > 0$ קבוע ממשי.
הוכיחו כי: $P(X < sE(X)) \ge \frac{s-1}{s}$.

6) נתון ש- $X_i \sim P(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ הם משתנים בלתי תלויים.
מצאו חסמים להסתברות ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i \ge 3n\lambda$.

7) הוכיחו את אי-שוויון מרקוב.
רמז: היעזרו במשתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר $X \ge a$.

8) בשכונה חדשה בונים n בתים חדשים הנבנים בחלקת אדמה עגולה. כל בית נצבע בלבן בסיכוי p ללא תלות בבתים האחרים. בניין שלא נצבע בלבן נצבע באפור. בית לבן הוא בית בודד אם הוא נמצא בין שני בתים אפורים.
נגדיר את X להיות מספר הבתים הלבנים הבודדים.

א. מצאו את התוחלת של X.

ב. כעת נניח ש-$p=\frac{1}{4}$. הראו שהסיכוי שמספר הבתים הלבנים הבודדים יהיה קטן מ-$\frac{n}{4}$ הוא לפחות $\frac{7}{16}$.

9) הוכיחו את אי-שוויון צ'בישב: אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך k חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\ge k\}\le\frac{Var(X)}{k^2}$.
רמז: היעזרו באי-שוויון מרקוב.

תשובות סופיות:

1) $P(X \geq 75) \leq \frac{65}{75} = \frac{13}{15}$.

2) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

3) לא יתכן.

4) $\frac{1}{3}$.

5) שאלת הוכחה.

6) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $n \cdot p(1-p)^2$. ב. שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

אי-שוויון צ'בישב:

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך a חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq a\}\leq\frac{Var(X)}{a^2}$.

מכאן גם נובע שמתקיים: $P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$.

אי-שוויון צ'בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידיעת ההתפלגות של המשתנה המקרי X.

דוגמה:

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$\sigma(X)=3$

$P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$, נציב:

$$P\{|X-E(X)|<5\}\geq 1-\frac{3^2}{5^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=0.64$$

$P\{|X-E(X)|<5\}\neq 0.6$, לכן לא יתכן.

שאלות:

1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3:

א. $p(2<x<14)$.

ב. $p(|x-8|\geq 9)$.

2) האם קיים משתנה מקרי X בעל תוחלת μ וסטית תקן σ שעבורו מתקיים $P(\mu-3\sigma\leq X\leq \mu+3\sigma)=0.7$? הסבירו.

3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?

5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.

7) בוחרים קוד n ספרתי באופן מקרי.

א. עבור $n=10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.

ב. מה אורך הקוד המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות.
נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאד.
העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

9) $X_1, X_2 ..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר p באופן בלתי תלוי זה בזה. $0 < p < 1$. הוכיחו שמתקיים: $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n}$.

10) $X_1, X_2 ..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
הוכיחו שמתקיים: $P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n}$.

תשובות סופיות:

1) א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל- $\frac{1}{9}$.

2) לא יתכן.

3) 0.75.

4) לפחות 0.7.

5) לפחות 30.

6) 0.52.

7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.

8) 0.7056.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

אי שוויון צ'בישב החד צדדי (אי שוויון קנטיל):

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 0 ושונותו σ^2 סופית, אז לכל ערך חיובי a
מתקיים: $P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$, זהו אי-שוויון צ'בישב החד צדדי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון משתנה מקרי עם תוחלת 0 ושונות 4.
מה התחום האפשרי להסתברות שהמשתנה יקבל ערך שהוא לפחות 5?

תשובה:

$$E(X) = 0,\ V(X) = \sigma^2 = 4$$

$$P(X \geq 5) \leq \frac{4}{4+5^2} = \frac{4}{29}$$

$$0 \leq P(X \geq 5) \leq \frac{4}{29}$$

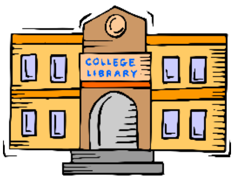
דרך אי-שוויון צ'בישב החד-צדדי אפשר לפתח את אי-שוויון קנטיל:
אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופית, אז לכל ערך חיובי a
מתקיים:

$$P(X \geq \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

$$P(X \leq \mu - a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מספר הנרשמים למחלקת התקשורת במכללה מסוימת הוא משתנה מקרי עם תוחלת 100 וסטיית תקן 20. מצאו חסם להסתברות שמספר הנרשמים למחלקת התקשורת במכללה יהיה לפחות 120.



א. לפי אי-שוויון מרקוב.

ב. לפי אי-שוויון קנטיל.

ג. השוו בין התוצאות. איזה אי-שוויון מדויק יותר?

תשובה:

$X =$ מספר הנרשמים

$$E(X)=100$$

$$V(X)=\sigma^2=20^2=400$$

א. אי שוויון מרקוב: $X =$ לא שלילי, $a>0$.

$$P(X\ge a)\le\frac{E(X)}{a}$$

$$P(X\ge 120)\le\frac{100}{120}=\frac{5}{6}$$

ב.

$$P(X\ge\mu+a)\le\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}\Rightarrow P(X\ge 120)=P(\mathrm{X}\ge 100+20)\le\frac{400}{400+20^2}=\frac{1}{2}$$

ג. אי שוויון קנטיל מדויק יותר מאשר אי שוויון מרקוב.

שאלות:

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. אם X הוא משתנה מקרי בדיד שמקבל ערכים שלמים אי-שליליים ותוחלתו 25, האם ייתכן ש- $P(X>75)=0.2$?

ב. מלבד הנתון בסעיף א', נניח גם שהשונות של X היא 25. האם ייתכן ש- $P(X>75)=0.2$?

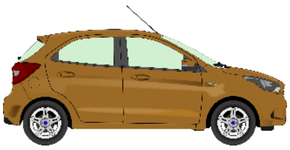
2) משתנה מקרי X כלשהו מתפלג עם תוחלת 10 ושונות 4. מצאו חסמים להסתברויות הבאות:

א. $X \ge 15$.

ב. $X \le 6$.

ג. $X > 17$.

3) מספר הנשיקות שדני נותן לדנה ביום מתפלג פואסונית עם תוחלת של 20 נשיקות ביום. מצאו, בעזרת אי-שוויון צ'בישב החד-צדדי, חסם להסתברות שדני ייתן לדנה מחר לפחות 26 נשיקות.



4) מספר המכוניות האמריקאיות הנמכרות במגרש מסוים מתפלג עם תוחלת 40 בחודש ושונות 10.
מספר המכוניות האירופיות הנמכרות באותו המגרש מתפלג עם תוחלת 40 בחודש ושונות 12.
השונות המשותפת של מספר המכוניות האמריקאיות הנמכרות בחודש ומספר המכוניות האירופיות הנמכרות בחודש באותו המגרש היא 3-.
מצאו חסמים להסתברויות הבאות:

א. מספר המכוניות האמריקאיות הנמכרות בחודש במגרש יהיה שונה ממספר המכוניות האירופיות הנמכרות בחודש במגרש ביותר מ-14.

ב. מספר המכוניות האמריקאיות שנמכרות בחודש במגרש גבוה ממספר המכוניות האירופיות שנמכרות בחודש במגרש ביותר מ-14.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 0 ושונותו σ^2 סופית,
אז לכל ערך חיובי a מתקיים: $P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.
רמז: הגדירו משתנה מקרי: $Y = X + b$ (כאשר $b > 0$), היעזרו באי-שוויון מרקוב ובחרו את ערכו של b שייתן אי-שוויון מדויק ביותר.

ב. הוכיחו שאם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופית,
אז לכל ערך חיובי a מתקיים: $P(X \geq \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

ג. הוכיחו שאם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופית,
אז לכל ערך חיובי a מתקיים: $P(X \leq \mu - a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

תשובות סופיות:

1) א. יתכן. ב. לא יתכן.

2) א. 0.13793. ב. 0.2. ג. 0.01365.

3) 0.3571.

4) א. 0.1244. ב. 0.1107.

5) שאלת הוכחה.