

הסתברות (5102)

פרק 34 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

1. אי שוויון מרקוב.....1

אי-שוויון מרקוב:

רקע:

אי-שוויון מרקוב רלבנטי לשימוש עבור כל משתנה מקרי אי-שלילי.

הפרמטר a הינו ממשי וחיובי ואז חייב להתקיים ש: $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$,

לכן מתקיים גם ש: $P(X < a) \geq 1 - \frac{E[X]}{a}$.

דוגמה:

אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשבו לפי אי-שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.

X = אורך חיים של מכשיר (רציף).

$$X \geq 0, E[X] = 500$$

$$P(X \geq 1500) \leq \frac{E[X]}{a} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

לכן, $0 \leq P(X \geq 1500) \leq \frac{1}{3}$.

שאלות:

- (1) ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 65. מצאו חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 75.
- (2) התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות. העריכו את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 ילדים.
- (3) X משתנה מקרי רציף אי-שלילי, שתוחלתו 15. האם ייתכן ש: $P(X > 65) = 0.3$?
- (4) X משתנה מקרי בדיד, המקיים: $X > -2$, ותוחלתו 6. מצאו חסם תחתון ל- $P(X < 10)$.
- (5) X משתנה מקרי המקיים: $P(X \geq 0) = 1$ ו- $s > 0$ קבוע ממשי. הוכיחו כי: $P(X < sE(X)) \geq \frac{s-1}{s}$.
- (6) נתון ש- $X_i \sim P(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$ הם משתנים בלתי תלויים. מצאו חסמים להסתברות ש- $\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda$.
- (7) הוכיחו את אי-שוויון מרקוב. רמז: היעזרו במשתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר $X \geq a$.

(8) בשכונה חדשה בונים n בתים חדשים הנבנים בחלקת אדמה עגולה. כל בית נצבע בלבן בסיכוי p ללא תלות בבתיים האחרים. בניין שלא נצבע בלבן נצבע באפור. בית לבן הוא בית בודד אם הוא נמצא בין שני בתים אפורים. נגדיר את X להיות מספר הבתים הלבנים הבודדים.

א. מצאו את התוחלת של X .

ב. כעת נניח ש- $p = \frac{1}{4}$. הראו שהסיכוי שמספר הבתים הלבנים הבודדים

$$\text{יהיה קטן מ-} \frac{n}{4} \text{ הוא לפחות } \frac{7}{16}.$$

(9) הוכיחו את אי-שוויון צ'בישב: אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונויותו הן סופיות, אז לכל ערך k חיובי מתקיים: $P\{|X - E(X)| \geq k\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{k^2}$.

רמז: היעזרו באי-שוויון מרקוב.

תשובות סופיות:

$$P(X \geq 75) \leq \frac{65}{75} = \frac{13}{15} \quad (1)$$

$$0 \leq P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3} \quad (2)$$

(3) לא יתכן.

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

$$0 \leq P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3} \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) א. $n \cdot p(1-p)^2$. ב. שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.