סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 1
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 2
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 3
4. אי שוויונים עם מנה 4
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 6
6. אי שוויונים עם ערך מוחלט 7
7. אי שוויונים עם שורשים 9

אי-שוויונים ממעלה ראשונה

סיכום כללי

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

3) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

תשובות סופיות

1) $x>3$

2) אף x.

3) $x<5$

אי-שוויונים ממעלה שנייה

סיכום כללי

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2 < 144$

2) $x^2 - 12x > -32$

3) $(x+2)(x+5) < 0$

4) $(x+2)(x+4) < 35$

5) $-x^2 + 13x + 30 < 0$

תשובות סופיות

1) $-12 < x < 12$

2) $x < 4 \ , \ x > 8$

3) $-5 < x < -2$

4) $-9 < x < 3$

5) $x < -2 \ , \ x > 15$

אי-שוויונים ממעלה שלישית

סיכום כללי

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

נפתור אותם על ידי פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם, ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

3) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

תשובות סופיות

1) $1<x<2\ ,\ x>3$

2) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

3) $x>2$

אי-שוויונים עם מנה

סיכום כללי

אי שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה,

בו $f(x)$ ו-$g(x)$ פולינומים.

למשל $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$, בו $f(x)=2x+4$ ו- $g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה, נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$,

ונציב מספרים בתחומים המתקבלים.

אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי-השוויון.

הערות

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל,
  על ידי פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

תשובות סופיות

1) $-3 < x < 1 \ , \ x > 3$

2) $x < -\frac{2}{3} \ , \ x \geq -\frac{1}{2}$

3) $2 < x < 3 \ , \ x > 3$

אי-שוויונים כפולים – מערכות וגם ואו

סיכום כללי

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם').

למשל, במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן, כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוונים,

ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

3) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

תשובות סופיות

1) $2<x<4$

2) $x>0$

3) $-2.5\le x\le 7$

אי שוויונים עם ערך מוחלט

סיכום כללי

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד

מקרה	$\lvert x\rvert < a$	$\lvert x\rvert > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x+2\rvert < 3$ ב. $\lvert 2x+1\rvert > 7$

ג. $\lvert 6-2x\rvert < x$ ד. $\lvert 2x+1\rvert - 3x > 4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < \lvert 4-3x\rvert < 7$ ב. $\lvert 2x+3\rvert < 8 < \lvert 5-x\rvert$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x-3\rvert + \lvert 2x+2\rvert > 7$ ב. $\lvert 3-2x\rvert - 11 > 4 - \lvert 6+x\rvert$

תשובות סופיות

1) א. $-5<x<1$ ב. $x<-4$ או $3<x$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $x<-2$ או $2<x$ ב. $x<-6$ או $4<x$

אי שוויונים עם שורשים

סיכום כללי

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3} < 7$

2) $\sqrt{2x-5} \geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6} < x-3$

תשובות סופיות

1) $-3 \leq x < 46$

2) $x \geq 3$

3) $x < -10 \ , \ x > 1$

4) $\varnothing$