

מבוא למתמטיקה

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 1
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 3
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 4
4. אי שוויונים עם מנה 5
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 7
6. שאלות מסכמות 8
7. מציאת תחום הגדרה 10
8. אי שוויונים עם ערך מוחלט 12
9. אי שוויונים עם שורשים 15

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $6x > 2(3x-1)$ (2) | $45x - 26 > 109$ (1) |
| $(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20$ (4) | $2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$ (3) |
| $4(6x-8) < 8(3x-4)$ (6) | $\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3}$ (5) |
| $\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7$ (8) | $\frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$ (7) |

תשובות סופיות:

(1) $x > 3$

(2) כל x

(3) אף x

(4) $x > -2$

(5) $x < 5$

(6) אף x

(7) $x \geq 12$

(8) $x > -13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2) | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1) |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4) | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5) |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8) | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7) |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10) | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9) |

תשובות סופיות:

- | | |
|----------------------------------|---|
| $x > 0$ (2) | $1 < x < 2, x > 3$ (1) |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6) | $x > 2$ (5) |
| $x \leq 0, x = 3$ (8) | $x < -2, 1 < x < 3$ (7) |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10) | $x > -3$ (9) |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהיו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנייל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

תשובות סופיות:

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

תשובות סופיות:

$$-2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x \leq -4 \quad (2)$$

$$-4 \leq x < 2, 3 \leq x \quad (3)$$

$$x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5 \quad (4)$$

$$-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12 \quad (5)$$

$$x < -3, 0 < x < 2.5 \quad (6)$$

$$x < -1, 2 < x < 6, x > 6 \quad (7)$$

$$2.5 \leq x < 8, x > 8 \quad (8)$$

$$x > 3 \quad (9)$$

$$x < -3, 0 < x < 1, x > 4 \quad (10)$$

$$-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3 \quad (11)$$

$$x > 7 \quad (12)$$

$$x < -2, 2 < x < 4 \quad (13)$$

$$x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4 \quad (14)$$

$$x \text{ אף } x \quad (15)$$

$$x \neq 1 \quad (16)$$

$$x \geq 7 \quad (17)$$

$$-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3 \quad (18)$$

תחום הגדרה:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	ב. $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$
ג. $f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3}$	ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$
ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$	ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2$, $x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, a פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$ x < a$	$ x > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
- ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x^2+6x-4| < 12$ ב. $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג. $|x^2-3x| < 4$ ד. $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה. $x^2-6|x|+5 \leq 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $|x+8| < 11 - |1-3x|$

א. $|x-3| + |2x+2| > 7$

ד. $|2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$

ג. $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

ו. $|x+3| + |x^2 - 5x + 4| < 19$

ה. $|5+4x| - |3-x| + \left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 22$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $1 \leq \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \leq 2$

א. $\left| \frac{3x-1}{x-2} \right| \geq 3$

ד. $\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \right| > 5$

ג. $\frac{|x-6| + 8x}{x-12} \leq 12$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

ב. $2 - \sqrt{1-x} \leq |x+2| - 3$

א. $\sqrt{x^2 - |x-12|} < x$

ד. $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$

ג. $\sqrt{|2x+1| - x - 1} \leq 4 - |3x|$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$ ב. $x < -4$ או $3 < x$
 ג. $2 < x < 6$ ד. $x < -1$
- (2) א. $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$ או $-1 < x < 1$ ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$ ב. $x < 2$ או $4 < x$
 ג. $-1 < x < 4$ ד. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
 ה. $-5 \leq x \leq -1$ או $1 \leq x \leq 5$ ו. $x < -5$, $x > 7$
- (4) א. $x < -2$ או $2 < x$ ב. $-1 < x < 1$
 ג. $x < -6$ או $4 < x$ ד. $x < -1$ או $4 < x$
 ה. $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$ ו. $-2 < x < 6$
- (5) א. $\frac{7}{6} \leq x < 2$, $x > 2$ ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, $x \geq 6$
 ג. $x < 12$, $x \geq 46$ ד. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x \leq 4$
- (6) א. $x = -1$, $x \geq 3$, $x \neq 12$ ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
 ג. $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad -3 \leq x < 46$$

$$(2) \quad x \geq 3$$

$$(3) \quad x < -10, x > 1$$

$$(4) \quad \emptyset$$

$$(5) \quad x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$(6) \quad x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$$

$$(7) \quad \frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$$

$$(8) \quad x < 2\sqrt{5} - 4$$

$$(9) \quad 1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(10) \quad -2.618 < x \leq 1 \text{ שזה: } -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$$

$$(11) \quad 2.5 \leq x < 3$$

$$(12) \quad x < -9, x > 0$$