# מבוא למתמטיקה

## פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

### תוכן העניינים


1. אי שוויונים ממעלה ראשונה ..... 1
2. אי שוויונים ממעלה שנייה ..... 3
3. אי שוויונים ממעלה שלישית ..... 4
4. אי שוויונים עם מנה ..... 5
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו ..... 7
6. שאלות מסכמות ..... 8
7. מציאת תחום הגדרה ..... 10
8. אי שוויונים עם ערך מוחלט ..... 12
9. אי שוויונים עם שורשים ..... 15

# אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

**פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $45x-26>109$

**2)** $6x>2(3x-1)$

**3)** $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

**4)** $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

**5)** $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

**6)** $4(6x-8)<8(3x-4)$

**7)** $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

**8)** $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

## תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל $x$
3) אף $x$
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף $x$
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

# אי-שוויונים ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $x^2<144$

**2)** $x^2-12x>-32$

**3)** $(x+2)(x+5)<0$

**4)** $(x+2)(x+4)<35$

**5)** $-x^2+13x+30<0$

**6)** $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

**7)** $(x-5)^2+x(x+2)<89$

**8)** $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

**9)** $-3x^2+12x>0$

**10)** $x^2-10x+25>0$

**11)** $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

**12)** $2x^2+2x+24\geq 0$

## תשובות סופיות:

**1)** $-12<x<12$

**2)** $x<4\ ,\ x>8$

**3)** $-5<x<-2$

**4)** $-9<x<3$

**5)** $x<-2\ ,\ x>15$

**6)** $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

**7)** $-4<x<8$

**8)** $-4\leq x\leq 0$

**9)** $0<x<4$

**10)** $x>5\ ,\ x<5$

**11)** $x<3\ ,\ x>5$

**12)** כל $x$

# אי-שוויונים ממעלה שלישית:

## סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$ , $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

**2)** $x(x^2+x+1)>0$

**3)** $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

**4)** $x^3-25x\ge 0$

**5)** $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

**6)** $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

**7)** $(x^2-x-6)(x-1)<0$

**8)** $x^3-6x^2+9x\le 0$

**9)** $(x^2+6)(x+3)>0$

**10)** $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

## תשובות סופיות:

**1)** $1<x<2$ , $x>3$

**2)** $x>0$

**3)** $-2\le x\le -1$ , $x\ge \frac{1}{2}$

**4)** $-5\le x\le 0$ , $x\ge 5$

**5)** $x>2$

**6)** $x\le 1\frac{2}{3}$

**7)** $x<-2$ , $1<x<3$

**8)** $x\le 0$ , $x=3$

**9)** $x>-3$

**10)** $x<1$ , $2<x<4$

# אי-שוויונים עם מנה:

## סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

**הערות:**

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

**2)** $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

**3)** $\frac{1}{x^2-16}>0$

**4)** $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

**5)** $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

**6)** $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

**7)** $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

**8)** $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

**9)** $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

**10)** $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

## תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

# אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

## סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $3<x+1<5$

**2)** $0<\frac{1}{x+4}<2$

**3)** $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

**4)** $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

**5)** $6x-38\le x-3\le 5x+7$

**6)** $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

**7)** $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

**8)** $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

## תשובות סופיות:

**1)** $2<x<4$

**2)** $x>-3\frac{1}{2}$

**3)** $x>0$

**4)** $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

**5)** $-2.5\le x\le 7$

**6)** $x\ge 10$

**7)** $1\le x<13$

**8)** $\phi$

# שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x\le -\frac{3}{4}\cap\left\{-2<x\le 5\ \cup\ 0<x<8\right\}$

2) $x\left(x+5\right)-3x+15\le 2x-1-x\left(4-x\right)$

3) $\frac{\left(x-3\right)\left(x+4\right)}{2-x}\le 0$

4) $\frac{\left(x-5\right)\left(3x+1\right)}{\left(2-x\right)\left(x+7\right)}<0$

5) $\frac{\left(2x-3\right)\left(x-12\right)}{\left(x+1\right)\left(4-x\right)}\ge 0$

6) $x\left(x+3\right)\left(2x-5\right)<0$

7) $\frac{\left(x-6\right)^2\left(x+1\right)}{x-2}>0$

8) $\frac{5-2x}{\left(x-8\right)^2}\le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2}>0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3}>0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x}>0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3}>0$

13) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8}\ge\frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

15) $6<5x-x^2\cap x^2>3x+10$

16) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}>0\ \cup\ \frac{1}{x-3}<\frac{1}{1-x}$

17) $1<\frac{x-1}{x-4}\le 2$

18) לאלו ערכי $x$ נמצאת הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g\left(x\right)=\frac{x+1}{x+3}$?

## תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2\ ,\ 3 \le x$

4) $x < -7\ ,\ -\frac{1}{3} < x < 2\ ,\ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5\ ,\ 4 < x \le 12$

6) $x < -3\ ,\ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1\ ,\ 2 < x < 6\ ,\ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8\ ,\ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ x > 4$

11) $-1 < x < 0\ ,\ 1 < x < 3\ ,\ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2\ ,\ 2 < x < 4$

14) $x \le 0\ ,\ 1 \le x < 2\ ,\ x > 4$

15) אף $x$

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5}\ ,\ x > 3$

# תחום הגדרה:

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

**3)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**4)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2\ ,\ x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ , ($a$ פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות $a$ את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר $a$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $-5 \leq x < -2 \, , \, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2 \, , \, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

**2)** א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

**3)** $a = 5$.

**4)** $a = 2$.

**5)** א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

# אי שוויונים עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

**כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:**

| מקרה | $\|x\|<a$ | $\|x\|>a$ |
|---|---|---|
| פתרון | $-a<x<a$ | $x<-a \cap x>a$ |

**כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:**

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

## שאלות:

**1)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2|<3$ ב. $|2x+1|>7$

ג. $|6-2x|<x$ ד. $|2x+1|-3x>4$

**2)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1<|4-3x|<7$ ב. $|2x+3|<8<|5-x|$

**3)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4|<12$ ב. $|x^2+x-10|>3x-2$

ג. $|x^2-3x|<4$ ד. $|6x^2-7x-4|>1$

ה. $x^2-6|x|+5\le 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1>0$

**4)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

**5)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

**6)** פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

**2)** א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

**3)** א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $-1<x<4$ ד. $x<-\frac{1}{2}$ , $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$ , $x>\frac{5}{3}$

ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x<-5$ , $x>7$

**4)** א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$

ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$

ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

**5)** א. $2<x$ , $\frac{7}{6}\le x<2$ ב. $x\ge 6$ , $0\le x\le\frac{2}{3}$

ג. $46\le x$ , $x<12$ ד. $2<x\le 4$ , $1<x<2$ , $\frac{1}{2}<x<1$

**6)** א. $x=-1$ , $x\ge 3$ , $x\ne 12$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$

ג. $-1\le x\le -\frac{2}{3}$ , $0\le x\le 1$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

# אי שוויונים עם שורשים:

## סיכום כללי:

**מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:**

| מקרה | אי השוויון | פתרון |
|---|---|---|
| $a\geq 0$ | $\sqrt{f(x)}<a$ | $0\leq f(x)<a^2$ |
| $a<0$ | $\sqrt{f(x)}<a$ | אין פתרון |
| | $\sqrt{f(x)}>a$ | כל $x$ בת.ה. של $f(x)$ |

## שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

**1)** $\sqrt{x+3}<7$

**2)** $\sqrt{2x-5}\geq 1$

**3)** $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$

**4)** $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

**5)** $\sqrt{x^2+3x+2}-1<\sqrt{x^2-x+1}$

**6)** $\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

**7)** $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$

**8)** $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

**9)** $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

**10)** $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

**11)** $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

**12)** $\sqrt{1+\frac{9}{x}}+5\sqrt{\frac{x}{x+9}}\geq 4$

## תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.
2) $x \ge 3$.
3) $x < -10 \ , \ x > 1$.
4) $\varnothing$.
5) $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \ , \ x \le -2$.
6) $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16} \ , \ x \le -3$.
7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.
8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.
9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.
10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.
11) $2.5 \le x < 3$.
12) $x < -9 \ , \ x > 0$.