מבוא מתמטי לפיסיקאים 2 (ממפיס 2)

פרק 3 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קוויים ושימושיהם..... 1
2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים..... 5

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

1) $f(x,y)=1-x^2$; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

2) $f(x,y)=x$; $C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$

3) $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$.

4) $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של ΔOAB : $O(0,0),\quad A(0,1),\quad B(1,0)$.

בשאלות **5-6** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

5) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\quad 0\le t\le \pi$

6) $f(x,y,z)=x^3+3z$; $C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\quad 0\le t\le 3$

7) חשבו את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשבו את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות **9-10** חשבו:

9) $\int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$

10) $\int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$; $C:\ x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1$

11) חשבו $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו- C נתון ע"י המשוואה:

א. $y=2x$

ב. $y=x^2$

12) חשבו $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:

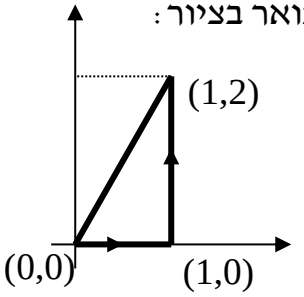
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

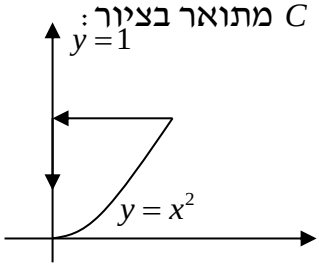
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

13) חשבו $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



14) חשבו $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



15) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ-$(0,0,0)$ ל-$(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ-$(0,0,0)$ ל-$(0,0,1)$, משם ל-$(0,1,1)$ ומשם ל-$(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו-$(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

16) $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

17) $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

18) נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשבו את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ-$(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ-$(1,1)$ עד $(-2,4)$?

19) חשבו את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,

על חלקיק הנע לאורך העיקול $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C (f,g,h)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C (A_1,A_2,A_3)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) π

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) 6

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. 3 ב. -3

19) 1

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,\ y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,\ y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t,\ y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t,\ y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,\ y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t,\ y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0,y_0) לנק' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנק' $(1,2)$ לנק' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0,y_0,z_0) לנק' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©