# חדוא 2

## פרק 26 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים קוויים ושימושיהם..... 1
2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים..... 5

# אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

## שאלות

**אינטגרל קווי מסוג I**

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

**1)** $f(x,y)=1-x^2$ ; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

**2)** $f(x,y)=x$ ; $C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$

**3)** $f(x,y)=x+y$ ; $C$ קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$.

**4)** $f(x,y)=x+y^2$ ; $C$ היקפו של $\Delta OAB$ : $O(0,0),\quad A(0,1),\quad B(1,0)$.

בשאלות **5-6** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

**5)** $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\quad 0\le t\le \pi$

**6)** $f(x,y,z)=x^3+3z$ ; $C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\quad 0\le t\le 3$

**7)** חשבו את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

**8)** סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשבו את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**אינטגרל קווי מסוג II**

בשאלות **9-10** חשבו:

**9)** $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\ ;\ \int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$

**10)** $C:\ x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1\ ;\ \int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$

**11)** חשבו $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר $C$ המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו- $C$ נתון ע"י המשוואה:

א. $y=2x$

ב. $y=x^2$

**12)** חשבו $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:

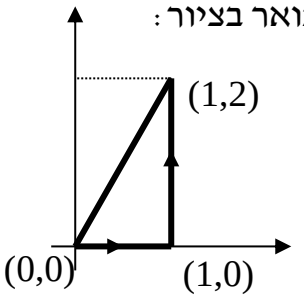
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

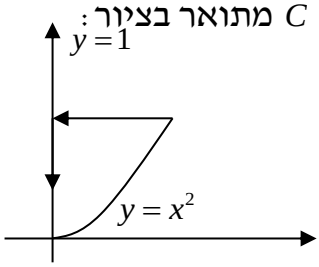
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

**13)** חשבו $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר המסלול $C$ מתואר בציור:




**14)** חשבו $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר המסלול $C$ מתואר בציור:



**15)** אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ-$(0,0,0)$ ל-$(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ-$(0,0,0)$ ל-$(0,0,1)$, משם ל-$(0,1,1)$ ומשם ל-$(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו-$(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

**16)** $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

**17)** $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

**18)** נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשבו את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ-$(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ-$(1,1)$ עד $(-2,4)$?

**19)** חשבו את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,

על חלקיק הנע לאורך העיקול $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

**הערת סימון**

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C (f,g,h)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C (A_1,A_2,A_3)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\pi$

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) $6$

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. $11$ ג. $14$ ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. $2$ ב. $-3$ ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. $3$ ב. $-3$

19) $1$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

| עקום | הצגה פרמטרית | דוגמה |
|---|---|---|
| $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ | $x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$ | $y=x^2\ (1\le x\le 2)$ <br> $\Downarrow$ <br> $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$ |
| $x=f(y)\ (a\le y\le b)$ | $y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$ | $x=y^2\ (1\le y\le 2)$ <br> $\Downarrow$ <br> $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$ |
| $x^2+y^2=r^2$ <br> מעגל | $x=r\cos t,\ y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ <br> נגד כיוון השעון | $x^2+y^2=4$ <br> $\Downarrow$ <br> $x=2\cos t,\ y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| $x^2+y^2=r^2$ <br> מעגל | $x=r\cos t,\ y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ <br> עם כיוון השעון | $x^2+y^2=4$ <br> $\Downarrow$ <br> $x=2\cos t,\ y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ <br> אליפסה | $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ <br> נגד כיוון השעון | $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ <br> $\Downarrow$ <br> $x=3\cos t,\ y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ <br> אליפסה | $x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ <br> עם כיוון השעון | $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ <br> $\Downarrow$ <br> $x=3\cos t,\ y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| ישר פרמטרי <br> במישור <br> מהנק' $(x_0,y_0)$ <br> לנק' $(x_1,y_1)$ | $x=x_0+t(x_1-x_0)$ <br> $y=y_0+t(y_1-y_0)$ <br> $(0\le t\le 1)$ | ישר פרמטרי מהנק' $(1,2)$ לנק' $(3,4)$ <br> $x=1+2t$ <br> $y=2+2t$ <br> $(0\le t\le 1)$ |
| ישר פרמטרי <br> במרחב <br> מהנק' <br> $(x_0,y_0,z_0)$ <br> לנק' $(x_1,y_1,z_1)$ | $x=x_0+t(x_1-x_0)$ <br> $y=y_0+t(y_1-y_0)$ <br> $z=z_0+t(z_1-z_0)$ <br> $(0\le t\le 1)$ | ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ <br> $x=1+3t$ <br> $y=2+5t$ <br> $z=3+6t$ <br> $(0\le t\le 1)$ |


כתב ופתר – גיא סלומון ©