

משוואות של פיסיקה מתמטית

פרק 16 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של משטח (ללא ספר)
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 1
3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 2

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \iint_S x^2 y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y$$

$$\text{מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2]$$

$$(2) \iint_S x dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \text{ } 0 \leq x \leq 2, \text{ } 0 \leq z \leq 2$$

$$(3) \iint_S y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1$$

$$(4) \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ } z \geq 0$$

$$(5) \iint_S x y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \text{ } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(6) \text{ חשבו את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R$$

$$(7) \text{ היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1,$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0, \text{ קבועה.}$$

חשבו את מסת היריעה.

תשובות סופיות

$$171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2)$$

$$\pi\sqrt{2} / 4 \quad (3)$$

$$16\pi \quad (4)$$

$$93 / \sqrt{10} \quad (5)$$

$$4\pi R^2 \quad (6)$$

$$\frac{\pi\delta_0}{6} (5\sqrt{5} - 1) \quad (7)$$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ (n הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה \mathbf{F} דרך S.

$$(1) \quad S; \mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k} \quad \text{הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים:} \\ x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$$

$$(2) \quad S; \mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k} \quad \text{הוא פני הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(3) \quad S; \mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k} \quad \text{הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי} \\ \text{המישורים } 2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$$

$$(4) \quad S; \mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0$$

$$(5) \quad S; \mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k} \quad \text{הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4} \\ \text{והוא נמצא מעל המישור } xy$$

תשובות סופיות

$$\frac{11}{6} \quad (1)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (2)$$

$$27 \quad (3)$$

$$12\pi \quad (4)$$

$$-16\pi \quad (5)$$