

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 39 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות.....1

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרלים המשולשים:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \quad (4)$$

(5) גוף כלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ מלמעלה. חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

(6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמטה.

(7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ומלמטה על ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

(8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy , החסום על ידי הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ והגליל $x^2 + y^2 = a^2$.

(9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z = x^2 + y^2$ ובין $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

10 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 2$ ומלמטה על ידי $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. פתרו בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 1$ ומלמטה על ידי $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. פתרו בשתי דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12 חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ורדיוסו 1. א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות. ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13 הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ומחוץ לגליל $x^2 + y^2 = 1$. בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14 חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15 ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi + \sin\phi}} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos \phi} r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

$$4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{24\pi - 32}{9} \quad (3)$$

$$\frac{32\pi}{5} \quad (4)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107 / 488), V = \frac{122}{3} \pi \quad (5)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2})), V = \frac{64}{3} \pi (2 - \sqrt{2}) \quad (6)$$

$$\frac{64\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \quad (7)$$

$$\frac{\pi}{2} a^4 \quad (8)$$

$$\frac{5}{6} \pi \quad (9)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (10)$$

$$\frac{5}{3} \pi \quad (11)$$

$$\frac{5}{12} \pi \quad (12)$$

$$V = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx - \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx \quad (13)$$

$$V = \int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1/\sin\phi}^2 r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi \quad \lambda \quad V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 r dz dr d\theta \quad \text{ב.}$$

$$\frac{7}{6} \pi \quad (14)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (16)$$