

# מבוא לשיטות מתמטיות בפיסיקה

פרק 33 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות.....1

## אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

### שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרלים המשולשים:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \quad (4)$$

(5) גוף כלוא בגליל  $x^2 + y^2 = 9$ , בין המישור  $xy$  מלמטה, לבין מחצית פני הכדור

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \text{ מלמעלה.}$$

חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

(6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ מלמעלה, ועל ידי החרוט } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ מלמטה.}$$

(7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

ומלמטה על ידי החרוט  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

(8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור  $xy$ , החסום על ידי הפרבולואיד

$$z = x^2 + y^2 \text{ והגליל } x^2 + y^2 = a^2.$$

(9) חשבו את הנפח הכלוא בין  $z = x^2 + y^2$  ובין  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**10** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי  $z = 2$  ומלמטה על ידי  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . פתרו בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

**11** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי  $z = 1$  ומלמטה על ידי  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ . פתרו בשתי דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**12** חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 1)$  ורדיוסו 1. א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות. ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**13** הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ומחוץ לגליל  $x^2 + y^2 = 1$ . בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**14** חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

- על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

**15** ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi + \sin\phi}} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos \phi} r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

## תשובות סופיות

4 (1)

$\frac{\pi}{3}$  (2)

$\frac{24\pi - 32}{9}$  (3)

$\frac{32\pi}{5}$  (4)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107/488), V = \frac{122}{3}\pi$  (5)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2})), V = \frac{64}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$  (6)

$\frac{64\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$  (7)

$\frac{\pi}{2}a^4$  (8)

$\frac{5}{6}\pi$  (9)

$\frac{8\pi}{3}$  (10)

$\frac{5}{3}\pi$  (11)

$\frac{5}{12}\pi$  (12)

$$V = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx - \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx \quad \text{א. (13)}$$

$$V = \int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1/\sin\phi}^2 r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi \quad \text{ג.} \quad V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 r dz dr d\theta$$

$\frac{7}{6}\pi$  (14)

$\frac{2\pi}{3}$  (15)

$\frac{\pi}{8}$  (16)