

# מבוא למתמטיקה

פרק 14 - אינטגרלים מידיים ואינטגרלים בשיטת \*הנגזרת כבר בפנים\*

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 1
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" ..... 4
3. מציאת פונקציה קדומה ..... 5

## אינטגרלים מיידיים

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

$$(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ )

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל:  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ )

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(30) חשבו את האינטגרל:  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

(פתירה על ידי הכלל:  $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$ )

(31) חשבו את האינטגרל:  $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$

## תשובות סופיות

- $$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \quad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \quad 4x + c \quad (1)$$
- $$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \quad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$
- $$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \quad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \quad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \quad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \quad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$
- $$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \quad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \quad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$
- $$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \quad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$
- $$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \quad -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$
- $$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \quad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \quad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$
- $$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \quad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \quad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$
- $$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \quad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \quad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$
- $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \quad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$
- $$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (31)$$

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (3) \qquad \int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (6) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (4)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (9) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (8) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (11) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (10)$$

### תשובות סופיות

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + c \quad (2) \qquad \ln|x^2+1| + c \quad (1)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (6) \qquad e^{x^2} + c \quad (5) \qquad e^2 \ln|e^x+1| + c \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (9) \qquad 2\sqrt{x^2+1} + c \quad (8) \qquad \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (11) \qquad \frac{2}{9} (x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (10)$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

- (1) נתונה הנגזרת  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .  
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה הנגזרת  $f'(x) = 2x - 6$ .  
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה הנגזרת  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .  
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y = 5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה של  $f''(x) = 6x + 6$ .  
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,  
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה של  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .  
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y = -4$ .  
 מצאו את הפונקציה.

8 נתונה פונקציה  $f: R \rightarrow R$  המקיימת  $f(0) = 0$  וכן לכל  $x_0$  ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$$

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.  
 ב. חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  או קבעו שהוא אינו קיים.  
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.  
 ה. תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .  
 חשבו את הנגזרת  $(G(x) - f(x))'$ .

### תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8 א. רציפה לכל  $x$ . ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .

ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ . ה. 0.