

מתמטיקה לכלכלנים ב

פרק 1 - אינטגרלים מידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 1
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" 4
3. מציאת פונקציה קדומה 5

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

$$(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

$$\left(\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} : \right)$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} : \right)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} : \quad (30)$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} : \right)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx : \text{חשבו את האינטגרל} : \quad (31)$$

תשובות סופיות

- $-\frac{1}{x} + c$ (3) $\frac{x^5}{5} + c$ (2) $4x + c$ (1)
- $\frac{4x^{11}}{11} + c$ (6) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c$ (5) $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c$ (4)
- $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c$ (9) $-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c$ (8) $\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$ (7)
- $\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c$ (12) $-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c$ (11) $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c$ (10)
- $-\frac{1}{(x-2)^4} + c$ (15) $\frac{(x-1)^{21}}{21} + c$ (14) $\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c$ (13)
- $10\sqrt{2x+4} + c$ (17) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c$ (16)
- $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c$ (19) $-\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c$ (18)
- $\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c$ (22) $\frac{\ln|x|}{4} + c$ (21) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c$ (20)
- $x + \ln|x+2| + c$ (25) $\frac{\ln|4x-1|}{4} + c$ (24) $x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c$ (23)
- $\frac{e^{2x+2}}{2} + c$ (28) $\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c$ (27) $4(x - 1.75\ln|x+2|) + c$ (26)
- $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c$ (30) $8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c$ (29)
- $-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c$ (31)

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (3) \qquad \int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (6) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (4)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (9) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (8) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (11) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (10)$$

תשובות סופיות

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + c \quad (2) \qquad \ln|x^2+1| + c \quad (1)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (6) \qquad e^{x^2} + c \quad (5) \qquad e^2 \ln|e^x+1| + c \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (9) \qquad 2\sqrt{x^2+1} + c \quad (8) \qquad \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (11) \qquad \frac{2}{9} (x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (10)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - 6$.
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה של $f''(x) = 6x + 6$.
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה של $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
 מצאו את הפונקציה.

8 נתונה פונקציה $f: R \rightarrow R$ המקיימת $f(0) = 0$ וכן לכל x_0 ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$$

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ או קבעו שהוא אינו קיים.
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

8 א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.