חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 1 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון 1
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני 3
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי 4
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים 5
5. מבחני השוואה 6
6. התכנסות בהחלט 8
7. מבחן דיריכלה 9
8. התכנסות בתנאי 10

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-5**:

1) $\int_1^\infty \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

3) $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$

4) $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+5}dx$

5) $\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx$

6) הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, עבור $|\alpha|<1$.

7) הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha-\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $|\alpha|>1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{1}{2e}$

4) מתבדר: ∞.

5) $\frac{5}{4e^2}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

תשובות סופיות

1) מתבדר: ∞.

2) מתבדר: ∞.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

1) מתבדר: ∞.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x , עבור $x\le 1$.

2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

3) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$.
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0\le x\le k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x\ge k$.
מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}e^2$

2) $2\sqrt{5}$

3) $k=\sqrt[3]{\ln 2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

1) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$

2) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$

3) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4}dx$

4) $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot\ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

5) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

6) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$

7) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$

8) $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

9) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x}dx$

10) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

11) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

12) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

13) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}dx$

14) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

15) $\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

16) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}\sqrt{(1+x)^5}}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

1) $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$

2) $\int_0^\infty e^{-10x}\sin 4x dx$

3) $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

4) הוכיחו: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

תשובות סופיות

1) מתכנס.

2) מתכנס.

3) מתכנס.

4) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

1) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$

2) א. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p>0)$

ב. $\int_1^\infty \sin(x^2) dx$

3) $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p>0)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

1) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

2) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

3) א. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^p}dx$

4) $\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1}dx$

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\left(\tan x\right)}{\cos x}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,

מתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,

מתבדר עבור $p \geq 5$.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בתנאי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©