# חשבון אינפיניטסימלי 3 (חלקי)

## פרק 14 - אינטגרלים כפולים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים ..... 1
2. החלפת סדר אינטגרציה ..... 4

# אינטגרלים כפולים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-3**:

**1)** $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

**2)** $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

**3)** $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

**4)** $D$ – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(1,1),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

**5)** $D$ – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(-2,1),\mathrm{A}(2,1),\mathrm{O}(0,0)$.

**6)** $D$ – טרפז בעל הקודקודים: $\mathrm{C}(0,1),\mathrm{B}(1,2),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

**7)** $D$ – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

**8)** $D$ – עיגול $x^2+y^2\le y$.

**9)** $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

**10)** $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**11)** $\iint\limits_D xy^2dxdy$, כאשר $D$ חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

**12)** $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר $D$ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

**13)** $\iint\limits_D |xy|dxdy$, כאשר $D$ עיגול בעל הרדיוס $a$, שמרכזו בראשית.

**14)** $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר $D$ מקבילית בעלת הצלעות $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ $(a>0)$.

**15)** $\iint\limits_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר $D$ התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$$

5) $$\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$$

6) $$\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$$

7) $$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

8) $$\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$$

9) $$\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

10) $$\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+$$
$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) $0$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# החלפת סדר אינטגרציה

## שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

**1)** $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

**2)** $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

**3)** $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

**4)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

**5)** $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

**6)** $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

**7)** $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

**8)** $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

**9)** $(x,y\geq 0)\ \int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy$

**10)** $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

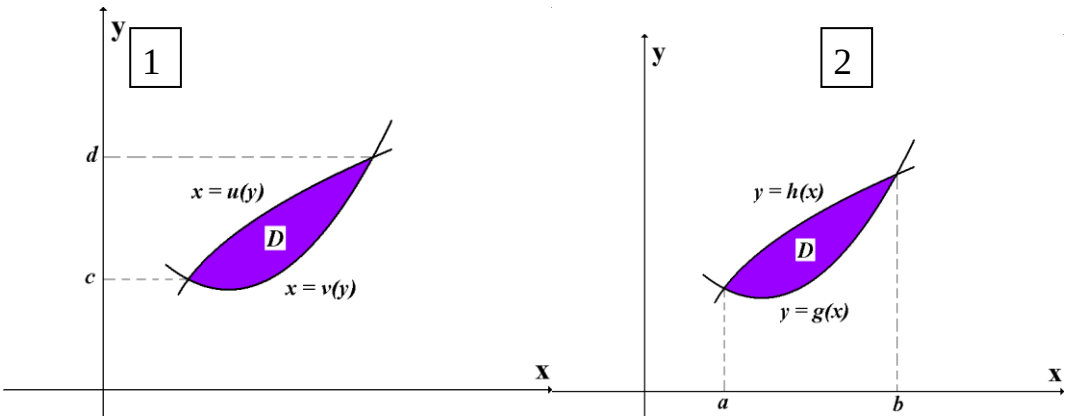
## הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$




שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

## תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$


כתב ופתר – גיא סלומון ©