

חדוא לתלמידי כלכלה וניהול

פרק 36 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים.....1
2. החלפת סדר אינטגרציה.....3

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-2 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

באינטגרל $\iint_D f(x,y) dx dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (3)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (5)$$

$$D = \{ (x,y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (6)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 7-9 :

$$\iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x=1. \quad (7)$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2,2). \quad (8)$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות} \quad (9)$$

$$y = 3a, y = a, y = x + a, y = x. \quad (a > 0)$$

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{1}{40}$

(3) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$

(4) $\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$

(5) $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$

(6) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

(7) $\frac{32}{21}$

(8) $8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$

(9) $14a^4$

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז : שנו את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (5)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (6)$$

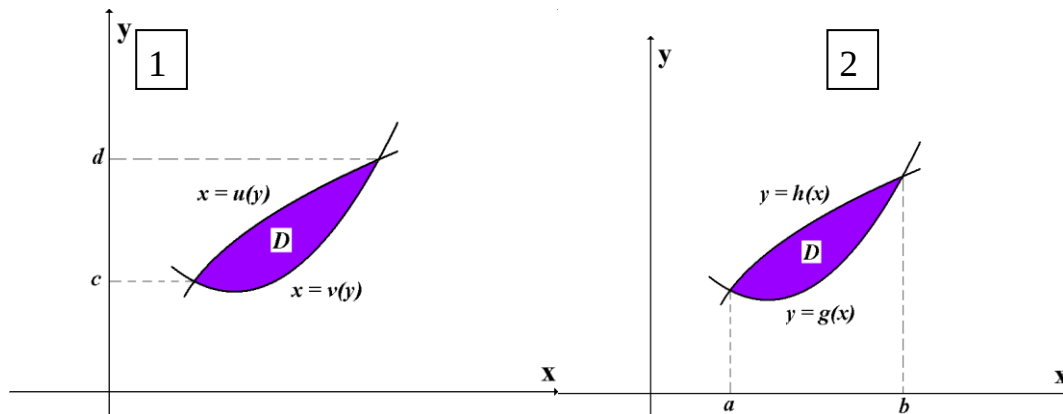
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך} : \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר, הרישום $dx dy$ והרישום $dy dx$ זהים.

תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (4)$$

$$\frac{241}{60} \quad (5)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (6)$$