חדוא לתלמידי כלכלה וניהול

פרק 36 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים 1
2. החלפת סדר אינטגרציה 3

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-2**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

3) D – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(1,1),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

4) D – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(-2,1),\mathrm{A}(2,1),\mathrm{O}(0,0)$.

5) D – טרפז בעל הקודקודים: $\mathrm{C}(0,1),\mathrm{B}(1,2),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

6) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **7-9**:

7) $\iint_D xy^2dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

8) $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

9) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a,\ y=3a\ (a>0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

4) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

6) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

7) $\frac{32}{21}$

8) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

9) $14a^4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-3**:

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

4) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

5) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

6) $(x,y\geq 0)\ \int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

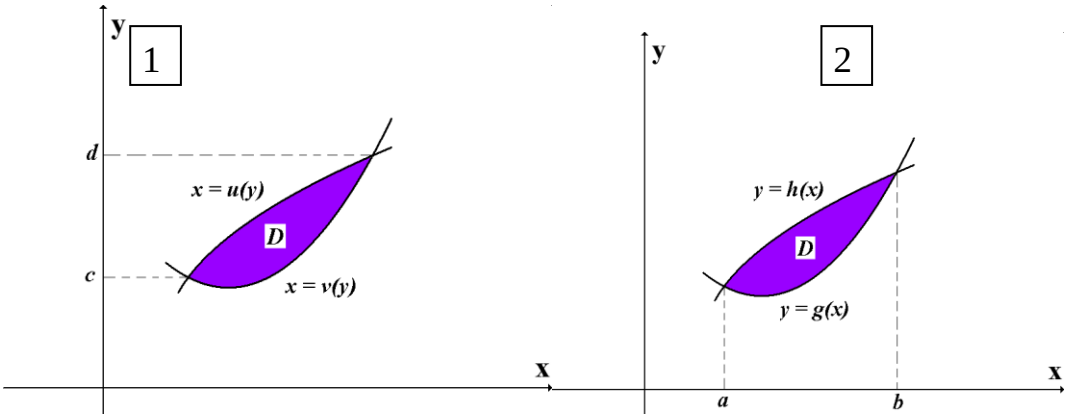
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

2

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



שימו לב, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$, כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$.

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר, הרישום $dxdy$ והרישום $dydx$ זהים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

5) $\frac{241}{60}$

6) $\frac{1}{4}(e-2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©